

# खेळा संख्यांशी

## प्रकरण 3

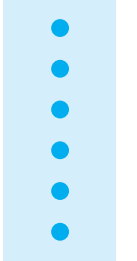
### 3.1 प्रस्तावना

रमेशजवळ 6 गोट्या आहेत. त्याला गोट्या ओळीत अशा मांडायच्या आहेत की, प्रत्येक ओळीत गोट्यांची संख्या समान येईल. तो खालील प्रकारे त्यांची मांडणी करतो व गोट्यांची संख्या पूर्ण करतो.

(i) प्रत्येक ओळीत एक गोटी

ओळींची संख्या = 6

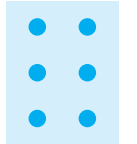
गोट्यांची एकूण संख्या =  $1 \times 6 = 6$



(ii) प्रत्येक ओळीत 2 गोट्या

ओळींची संख्या = 3

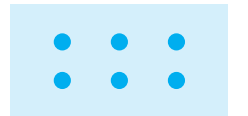
गोट्यांची एकूण संख्या =  $2 \times 3 = 6$



(iii) प्रत्येक ओळीत 3 गोट्या

ओळींची संख्या = 2

गोट्यांची एकूण संख्या =  $3 \times 2 = 6$



(iv) त्याला प्रत्येक ओळीत 4 किंवा 5 गोट्या येतील अशी एकही रचना सुचत नाही. एका ओळीत सर्व 6 गोट्या राहतील.

$$\text{ओळींची संख्या} = 1$$

$$\text{गोट्यांची एकूण संख्या} = 6 \times 1 = 6$$



या गणनांमध्ये रमेशला असे दिसते की, 6 या संख्येला विविध प्रकारांनी दोन संख्यांच्या गुणाकाराच्या रूपात लिहिता येते. जसे की खालीलप्रमाणे

$$6 = 1 \times 6; \quad 6 = 2 \times 3; \quad 6 = 3 \times 2; \quad 6 = 6 \times 1$$

$6 = 2 \times 3$  यामधून असे म्हटले जाते की, 2 आणि 3 ने 6 या संख्येला निःशेष भाग जातो. म्हणजेच 2 आणि 3 ते 6 चे विभाजक (भाजक) (divisors) आहेत. इतर गुणाकार  $6 = 1 \times 6$  मधून 6 चे इतर विभाजक 1 व 6 मिळतात.

अशाप्रकारे 1, 2, 3 आणि 6 हे 6 चे विभाजक आहेत. यांना 6 चे अवयव म्हणतात.

18 गोट्यांना ओळीत मांडण्याचा प्रयत्न करा आणि 18 चे अवयव मिळवा.

### 3.2 विभाजक आणि विभाज्य

मेरीला 4 ला पूर्ण भाग देणाऱ्या संख्या काढायच्या आहेत. ती 4 ला 4 पेक्षा कमी किंवा 4 ने भागते.

$$\begin{array}{r} 1) 4 (4 \\ \underline{-4} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{भागाकार} = 4$$

$$\text{बाकी} = 0$$

$$4 = 1 \times 4$$

$$\begin{array}{r} 2) 4 (2 \\ \underline{-4} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{भागाकार} = 2$$

$$\text{बाकी} = 0$$

$$4 = 2 \times 2$$

$$\begin{array}{r} 3) 4 (1 \\ \underline{-3} \\ 1 \end{array}$$

$$\text{भागाकार} = 1$$

$$\text{बाकी} = 1$$

$$\begin{array}{r} 4) 4 (1 \\ \underline{-4} \\ 0 \end{array}$$

$$4 = 4 \times 1$$

$$\text{भागाकार} = 1$$

$$\text{बाकी} = 0$$

तिला असे समजते की 4 ही संख्या खालील प्रकारे लिहिली जाऊ शकते.

$$4 = 1 \times 4; \quad 4 = 2 \times 2; \quad 4 = 4 \times 1$$

ती जाणून घेते की, 1, 2, 4 या संख्या 4 चे पूर्ण विभाजक आहेत.

त्यांना 4 चे अवयव म्हणतात.

एखाद्या संख्येचा अवयव तिचा पूर्ण (exact) विभाजक (divisor) असतो.



**खेळ 1 :** हा खेळ दोन व्यक्ती उदा. A आणि B यांच्याकडून खेळला जाऊ शकतो. यासाठी 50 कार्डांची आवश्यकता आहे. ज्यावर 1 ते 50 संख्या लिहिल्या आहेत. एका टेबलावर खालील दाखविल्याप्रमाणे ही कार्डे मांडा.

1	2	3	4	5	6	7	
8	9	10	11	12	13	14	
15	16	17	18	19	20	21	
22	23	24	25	26	27	28	
29	30	31	32	33	34	35	
36	37	38	39	40	41	42	
43	44	45	46	47	48	49	50

**पायऱ्या**

- आधी कोण खेळणार हे ठरवा A की B.
- समजा, A आधी खेळणार. तो टेबलावरून एक कार्ड घेईल आणि आपल्याकडेच ठेवेल. समजा त्यावर 28 लिहिले आहे.
- B खेळाडू आता ती सर्व कार्डे उचलतो, ज्यावर A ने उचललेल्या संख्येचे अवयव लिहिले आहेत. (उदा., 28 चे) व आपल्याकडे ठेवेल
- आता B खेळाडू एक कार्ड घेईल आणि B च्या कार्डावरील संख्येचे अवयव असलेली सर्व कार्डे A उचलून आपल्याकडे ठेवेल
- सर्व कार्डे उचलली जाईपर्यंत हा खेळ चालू राहील.
- A आपल्याजवळील संख्यांची बेरीज करेल. तसेच, B आपल्याजवळील संख्यांची बेरीज करेल. ज्याची बेरीज जास्त असेल तो जिंकेल.

कार्डांची संख्या वाढवून हा खेळ आणखी मजेदार बनवता येईल.

हा खेळ तुमच्या मित्रांसोबत खेळा. हा खेळ जिंकण्याची एखादी पद्धत तुम्ही शोधू शकाल का ?

जेव्हा आपण  $20 = 4 \times 5$  लिहितो तेव्हा आपण असे म्हणतो की, 4 आणि 5 हे 20 चे अवयव (factor) आहेत. आपण असेही म्हणतो की 20 ही संख्या 4 आणि 5 ची विभाज्य (multiple) आहे.

$24 = 2 \times 12$  हे असे दर्शवते की, 2 आणि 12 या संख्येचे अवयव आहेत. तसेच 24 ही संख्या 2 आणि 12 ने विभाज्य आले.

आपण असे म्हणू की, एखादी संख्या आपल्या प्रत्येक अवयवाने विभाज्य असते.

		गुणाकार
		↑
	$4 \times 5 = 20$	
↓	↓	
गुण्य	गुणक	

## प्रयत्न करा

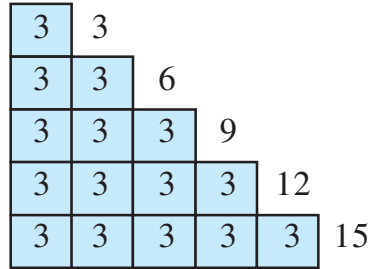
45, 30 आणि 36 चे अवयव काढा.

चला, आता अवयव आणि विभाज्य यांच्या संदर्भात काही मजेशीर गोष्टी पाहू.

- (a) प्रत्येकी 3 एकक लांबीच्या लाकडी किंवा कागदाच्या काही पट्ट्या घ्या.  
 (b) टोके जोडून खालीलप्रमाणे जोडा.

सर्वात वरची पट्टी  $3 = 1 \times 3$  एकक लांबीची असेल.

त्याच्या खालील पट्टी  $3 + 3 = 6$  एकक लांबीची तसेच  $6 = 2 \times 3$  अशी असेल.



पुढची पट्टी  $3 + 3 + 3 = 9$  एकक लांबीची आहे तसेच  $9 = 3 \times 3$  आहे. ही क्रिया अशीच चालू ठेवत आपण इतर लांबी खालीलप्रकारे सांगू शकतो.

$$12 = 4 \times 3 \quad ; \quad 15 = 5 \times 3$$

आपण असे म्हणतो की 3, 6, 9, 12, 15 या संख्या 3 ने विभाज्य आहेत.

3 च्या विभाज्यांची यादी 18, 21, 24, ... अशी पुढे वाढवू शकतो. यात प्रत्येक विभाजक 3 किंवा त्यापेक्षा मोठा आहे.

4 ने विभाज्य 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... आहेत. ही यादी संपत नाही. यात प्रत्येक विभाजक 4 किंवा त्यापेक्षा मोठा आहे.

विभाजक आणि विभाज्य यांबद्दल आपण कोणता निष्कर्ष काढू शकतो हे पाहू.

1. प्रत्येक संख्येच्या अवयवाच्या रूपात येईल अशी एखादी संख्या आहे का? ती 1 आहे. उदा.,

$$6 = 1 \times 6, 18 = 1 \times 18 \text{ इ. इतर संख्यांद्वारे आपण याचा पडताळा घेऊ शकतो.}$$

म्हणून आपण असे म्हणू शकतो की 1 ही संख्या प्रत्येक संख्येचा अवयव असते.

2. 7 हा स्वतःचा अवयव होऊ शकतो का? होय. 7 ला आपण  $7 \times 1$  या स्वरूपात लिहू शकतो. 15 बद्दल तुम्ही कोणता विचार करता? तुम्हांला असे दिसेल की, प्रत्येक संख्या तुम्ही या स्वरूपात लिहू शकता.

आपण म्हणतो की, **प्रत्येक संख्या ही स्वतःचा एक अवयव असते.**

3. 16 चे अवयव कोणते? 1, 2, 4, 8 आणि 16 आहेत. या अवयवांमध्ये असा एखादा अवयव आहे का ज्याने 16 ला भाग देता येत नाही. 20 आणि 36 च्या बाबतीतदेखील वरील विधान तपासून पाहा.

तुम्हांला असे समजेल की **एखादी संख्येचा प्रत्येक अवयव त्या संख्येचा एक पूर्ण विभाजक असतो.**

4. 34 चे अवयव कोणते आहेत? 1, 2, 17 व 34, यात सर्वात मोठा अवयव कोणता आहे? तो आहे 34. इतर अवयव 1, 2 आणि 17 हे 34 पेक्षा लहान आहेत. 64, 81 आणि 56 च्या बाबतीत वरील विधान तपासून पाहा. आपण असे म्हणू शकतो की, **दिलेल्या संख्येचा प्रत्येक अवयव तिच्यापेक्षा लहान किंवा तिच्याएवढा असतो.**

5. 76 च्या अवयवांची संख्या 5 आहे. 136 चे किती अवयव आहेत? 96 चे किती अवयव आहेत? तुम्ही प्रत्येक संख्येच्या अवयवांची संख्या मोजू शकता. 10576, 25642 अशा मोठ्या संख्यांचेदेखील अवयव तुम्ही मोजू शकता. कदाचित या संख्यांचे अवयव पाडणे तुम्हांला कठीण जाईल.

आपण असे म्हणू शकतो की **एखाद्या दिलेल्या संख्येच्या अवयवांची संख्या मर्यादित परिमित (finite) असते.**

6. 7 चे विभाज्य कोणते आहेत? 7, 14, 21, 28,... असे आहेत. यात प्रत्येक विभाज्य हा 7 पेक्षा मोठा किंवा 7 आहे हे विधान प्रत्येक संख्येच्या विभाज्यांसाठी सत्य आहे का? 6, 9, 10 इत्यादींच्या विभाज्यांशी पडताळा घेऊन पाहा.

आपल्याला असे दिसून येते की, प्रत्येक संख्येचे प्रत्येक विभाज्य त्या संख्येहून मोठा किंवा संख्येइतकाच असतो.

7. 5 चे विभाज्य लिहा. 5, 10, 15, 20, ... तुम्ही हा विचार कराल की ही सूची कधी संपेल? नाही. ही यादी न संपणारी आहे. याचा पडताळा 6 आणि 7 चे विभाज्य घेऊन पाहा.

आपल्याला असे दिसून येते की **एखाद्या संख्येच्या विभाज्यांची संख्या अमर्यादित (infinite) आहे.**

8. 7 हा स्वतःचा एक विभाज्य आहे का? होय, कारण  $7 = 7 \times 1$  आहे. हे विधान इतर संख्यांसाठीदेखील सत्य आहे. हे विधान इतर संख्यांसाठीदेखील सत्य आहे का? 3, 12 आणि 16 या संख्यांची मांडणी करून पडताळा घ्या.

तुम्हांला असे दिसेल की, **प्रत्येक संख्या ही स्वतःचा विभाज्य असते.**

6 चे सर्व अवयव = 1, 2, 3 आणि 6 आले. तसेच,  $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \times 6$  आहे. आपल्याला हे समजते की 6 च्या सर्व अवयवांची बेरीज 6 च्या दुप्पट आहे. 28 चे सर्व अवयव = 1, 2, 4, 7, 14 आणि 28 आहेत. यांची बेरीज केल्यास,

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \times 28 \text{ होते.}$$

म्हणजेच 28 च्या सर्व अवयवांची बेरीज ही 28 च्या दुप्पट आहे.

जिच्या सर्व अवयवांची बेरीज ही त्या संख्येच्या दुप्पट असते, अशी संख्या परिपूर्ण संख्या (perfect number) म्हटली जाते.

10 ही एक परिपूर्ण संख्या आहे का?

**उदाहरण 1** : 68 चे सर्व अवयव लिहा.

**उकल** :  $68 = 1 \times 68$        $68 = 2 \times 34$        $68 = 4 \times 17$   
 $68 = 17 \times 4$

या ठिकाणी थांबा. कारण 4 आणि 17 यापूर्वी आले आहेत.

अशाप्रकारे 68 चे अवयव 1, 2, 4, 17, 34, 68 असे आहेत.

**उदाहरण 2** : 36 चे अवयव काढा.

**उकल** :  $36 = 1 \times 36$        $36 = 2 \times 18$   
 $36 = 3 \times 12$        $36 = 4 \times 9$   
 $36 = 6 \times 6$

या ठिकाणी थांबा. कारण दोन्ही अवयव (6) समान आहे.

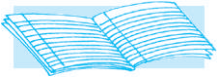
अशाप्रकारे अपेक्षित मिळालेले अवयव 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 आणि 36 आहेत.

**उदाहरण 3** : 6 चे सुरुवातीचे 5 विभाज्य लिहा.

**उकल** : मिळालेले विभाज्य

$$6 \times 1 = 6, 6 \times 2 = 12, 6 \times 3 = 18, 6 \times 4 = 24 \text{ और } 6 \times 5 = 30$$

म्हणजेच, 6, 12, 18, 24 आणि 30 आहेत.



### उदाहरणसंग्रह 3.1

1. खालील संख्यांचे सर्व अवयव लिहा.

- |        |        |        |
|--------|--------|--------|
| (a) 24 | (b) 15 | (c) 21 |
| (d) 27 | (e) 12 | (f) 20 |
| (g) 18 | (h) 23 | (i) 36 |

2. खालील संख्यांचे पहिले पाच विभाज्य लिहा.

- |       |       |       |
|-------|-------|-------|
| (a) 5 | (b) 8 | (c) 9 |
|-------|-------|-------|

3. पहिल्या स्तंभातील संख्यांच्या दुसऱ्या स्तंभाशी योग्य जोड्या लावा.

स्तंभ 1

स्तंभ 2

- |          |                   |
|----------|-------------------|
| (i) 35   | (a) 8 चा विभाज्य  |
| (ii) 15  | (b) 7 चा विभाज्य  |
| (iii) 16 | (c) 70 चा विभाज्य |
| (iv) 20  | (d) 30 चा अवयव    |
| (v) 25   | (e) 50 चा अवयव    |
|          | (f) 20 चा अवयव    |

4. 9 चे 100 पेक्षा कमी असलेले सर्व विभाज्य लिहा.

### 3.3 मूळ संख्या व संयुक्त संख्या

आता आपण एखाद्या संख्येचे अवयव काढण्याची पद्धत शिकलो आहोत. खालील तक्त्यात लिहिलेल्या काही संख्यांच्या अवयवांच्या संख्या लक्षात घ्या.

संख्या	अवयव	अवयवांची संख्या
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
6	1, 2, 3, 6	4
7	1, 7	2
8	1, 2, 4, 8	4
9	1, 3, 9	3
10	1, 2, 5, 10	4
11	1, 11	2
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6

आपल्याला असे दिसून येते की,

- (a) 1 या संख्येचा अवयव 1 (स्वतः तीच संख्या) आहे.
- (b) काही संख्या जसे की, 2, 3, 5, 7, 11 इ. अशा आहेत की त्यांचे फक्त दोन अवयव आहेत. (1 आणि स्वतः ती संख्या) या संख्या मूळ संख्या (prime numbers) आहेत. ज्या संख्यांना 1 आणि ती स्वतः संख्या असे दोनच अवयव असतात त्या संख्यांना मूळ संख्या म्हणतात.

या संख्यांशिवाय इतर काही मूळ संख्या माहीत करून घ्या.

- (c) 4, 6, 8, 9, 10 या संख्यांसारख्या काही संख्या अशा आहेत की, ज्यांचे दोनपेक्षा जास्त अवयव आहेत. या संयुक्त (composite numbers) संख्या आहेत. ज्या संख्यांना दोनपेक्षा जास्त अवयव असतात त्यांना संयुक्त संख्या म्हणतात.

लक्षात ठेवा :

1 ही संख्या मूळही नाही आणि संयुक्तही नाही.

15 ही एक संयुक्त संख्या आहे का? 18 आणि 25 बदल तुम्हांला काय वाटते?

एक सोपी पद्धत आहे. त्याद्वारे 1 ते 100 दरम्यानच्या मूळ संख्या अवयव न पाडता मिळवता येतात. ही पद्धत इ.स.पू. तिसऱ्या शतकातील एक ग्रीक गणितज्ञ इराटोस्थनीस (Eratosthenes) यांनी शोधली होती. चला, ही पद्धत पाहूया. 1 ते 100 पर्यंतच्या संख्या खालीलप्रमाणे लिहा.

<del>1</del>	2	3	<del>4</del>	5	<del>6</del>	7	<del>8</del>	<del>9</del>	10
11	<del>12</del>	13	14	<del>15</del>	16	17	18	19	20
21	<del>22</del>	23	24	<del>25</del>	26	<del>27</del>	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	<del>42</del>	43	44	<del>45</del>	46	47	48	<del>49</del>	50
51	52	53	<del>54</del>	55	56	57	58	59	60
61	62	<del>63</del>	<del>64</del>	<del>65</del>	66	67	68	<del>69</del>	70
71	<del>72</del>	73	<del>74</del>	<del>75</del>	76	<del>77</del>	78	79	<del>80</del>
81	82	83	84	85	86	<del>87</del>	88	89	90
91	<del>92</del>	<del>93</del>	<del>94</del>	<del>95</del>	96	97	98	<del>99</del>	<del>100</del>

**पायरी-1** : 1 ला काट मारा कारण ती एक मूळ संख्या नाही.

**पायरी-2** : 2 ला गोल करा आणि 2 चे इतर सर्व विभाज्य जसे की, 4, 6, 8, ..... यांना काट मारा.

**पायरी-3** : पुढची काट न मारलेली संख्या 3 आहे. 3 ला गोल करा आणि 3 चे इतर सर्व विभाज्यांना काट मारा.

**पायरी-4** : पुढची काट न मारलेली संख्या 5 आहे. 5 ला गोल करा आणि 5 च्या इतर सर्व विभाज्यांना काट मारा.

**पायरी-5** : ही क्रिया तोपर्यंत चालू ठेवा जोवर वरील तक्त्यातील सर्व संख्यांना एक तर गोल नाहीतर काट बसेल. गोल केलेल्या सर्व संयुक्त संख्या आहेत. 1 सोडून इतर सर्व काटलेल्या संख्या मूळ संख्या आहेत. ही पद्धत 'इराटोस्थनीसची चाळणी' (Sieve of Eratosthenes) ओळखली जाते.

### प्रयत्न करा

लक्षात घ्या की  $2 \times 3 + 1 = 7$  ही एक मूळ संख्या आहे. या ठिकाणी 2 च्या एका विभाज्यात 1 मिळवून एक मूळ संख्या मिळाली आहे. अशाप्रकारे थोड्या मूळ संख्या शोधता येतील का?

**उदाहरण 4** : 15 पेक्षा सर्व लहान मूळ संख्या लिहा.

**उकल** : चाळणी पद्धतीने वरील तक्ता पाहून आपण मिळालेल्या मूळ संख्या लिहू शकतो : 2, 3, 5, 7, 11 आणि 13



### सम आणि विषम संख्या

तुम्हांला 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... यात एखादा (pattern) आकृतिबंध दिसतो का? तुम्हांला समजेल की यात प्रत्येक संख्या ही 2 ची विभाज्य आहे.

यांना **सम संख्या (even numbers)** म्हणतात. उर्वरित सर्व नैसर्गिक संख्या. उदा., 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... **विषम संख्या (odd numbers)** म्हणतात.

2 किंवा 3 अंकी संख्या या सम संख्या आहेत की नाही हे आपण पडताळून पाहू शकतो. आपण कसे ओळखणार की 756482 सारखी मोठी संख्या एक सम संख्या आहे की नाही? 2 ने भाग देऊन ही क्रिया थोडी किचकट होईल का?

आपण असे म्हणू शकतो की, ज्या संख्यांच्या एकक स्थानी 0, 2, 4, 6, 8 यांपैकी एक अंक असेल तर ती संख्या सम संख्या असते. म्हणून 350, 4862 आणि 59246 या सम संख्या आहेत. 457, 2359 आणि 8231 विषम संख्या आहेत. चला आता काही मजेशीर गोष्टी घेऊ.

(a) सर्वात लहान सम संख्या कोणती आहे? ती म्हणजे 2.

सर्वात लहान मूळ संख्या कोणती आहे? पुन्हा ती 2 आहे.

अशाप्रकारे, 2 ही सर्वात लहान मूळ संख्या आहे जी समदेखील आहे.

(b) 2 शिवाय इतर मूळ संख्या 3, 5, 7, 11 ..... आहेत. या यादीमध्ये दुसरी कोणती सम संख्या आहे का? नाही. सर्व विषम संख्या आहेत. आणखी काही मूळ संख्या शोधा.

अशाप्रकारे, आपण असे म्हणू शकतो की, 2 शिवाय इतर सर्व मूळ संख्या विषम आहेत.



### उदाहरणसंग्रह 3.2

1. जर (र) विषम संख्या (ल) सम संख्या यांची बेरीज केली तर ती सम असते की विषम?
2. खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आणि असत्य आहेत?
  - (a) तीन विषम संख्यांची बेरीज सम असते.
  - (b) दोन विषम संख्या आणि एक सम संख्या यांची बेरीज सम असते.
  - (c) तीन विषम संख्यांचा गुणाकार विषम असतो.
  - (d) जर एखाद्या सम संख्येला 2 ने भागले तर भागाकार नेहमी विषम येतो.
  - (e) सर्व मूळ संख्या विषम आहेत.
  - (f) मूळ संख्यांचे कोणतेही अवयव नसतात.
  - (g) दोन मूळ संख्यांची बेरीज नेहमी सम येते.
  - (h) फक्त 2 हीच एक सम मूळ संख्या आहे.
  - (i) सर्व सम संख्या संयुक्त संख्या आहेत.
  - (j) दोन सम संख्यांचा गुणाकार नेहमी सम असतो.

3. 13 आणि 31 या मूळ संख्या आहेत. या दोन्हीमध्ये 1 आणि 3 अंक आहेत. 100 पर्यंतच्या संख्यांमधील अशा आणखी जोड्या शोधा.
4. 20 पेक्षा लहान असलेल्या सर्व मूळ आणि संयुक्त संख्या वेगवेगळ्या लिहा.
5. 1 ते 10 च्या दरम्यान येणारी सर्वात मोठी मूळ संख्या लिहा.
6. खालील संख्यांना दोन मूळ संख्यांच्या बेरजेच्या रूपात मांडा.  
(a) 44 (b) 36 (c) 24 (d) 18
7. मूळ संख्यांच्या अशा तीन जोड्या लिहा. ज्यांच्यात 2 चा फरक आहे.  
[टीप - 2 चा फरक येणाऱ्या अशा मूळ संख्यांना जोडमूळ संख्या (twin primes) म्हणतात.]
8. खालीलपैकी मूळ संख्या कोणती?  
(a) 23 (b) 51 (c) 37 (d) 26
9. 100 पेक्षा लहान सात क्रमवार संयुक्त संख्या लिहा ज्यांच्या दरम्यान कोणतीही मूळ संख्या येत नाही.
10. खालील संख्यांना प्रत्येकी तीन मूळ संख्यांच्या बेरजेच्या रूपात मांडा.  
(a) 21 (b) 31 (c) 53 (d) 61
11. 20 पेक्षा लहान मूळ संख्यांच्या अशा 5 जोड्या लिहा ज्यांची बेरीज 5 ने विभाज्य असेल (divisible) उदा., (3 + 7 = 10)
12. खालील रिक्त्या जागा भरा.  
(a) अशी संख्या जिचे फक्त दोनच अवयव आहेत. तिला \_\_\_\_\_ म्हणतात.  
(b) अशी संख्या जिचे दोन किंवा अधिक अवयव असतील, त्यांना \_\_\_\_\_ म्हणतात.  
(c) 1 ही संख्या \_\_\_\_\_ नाही आणि \_\_\_\_\_ नाही.  
(d) सर्वात लहान मूळ संख्या \_\_\_\_\_ आहे.  
(e) सर्वात लहान संयुक्त संख्या \_\_\_\_\_ आहे.  
(f) सर्वात लहान सम संख्या \_\_\_\_\_ आहे.

### 3.4 संख्यांच्या विभाज्यतेच्या कसोट्या

38 ही संख्या 2 ने विभाज्य आहे का? 4 ने विभाज्य आहे का? 5 ने विभाज्य आहे का?

38 या संख्येला या संख्यांनी भागल्यानंतर आपल्याला समजेल की 38 ही 2 ने विभाज्य आहे. परंतु 4 किंवा 5 ने नाही.

चला, आपण एखादा आकृतिबंध (pattern) तयार होतोय का ते पाहू ज्याद्वारे आपल्याला कळेल की एखादी संख्या 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 किंवा 11 ने विभाज्य आहे की नाही? तुम्हांला असे वाटते का की असे आकृतिबंध आपल्याला सहजपणे प्राप्त होतील?

**10 ची कसोटी :** चारू 10 चे विभाज्य 10, 20, 30, 40, 50, 60, ... यांकडे पाहत होती. तिला या संख्यांमध्ये एक सामाईक गुणधर्म दिसून आला. तुम्ही सांगू शकता का की तो गुणधर्म कोणता आहे? यामध्ये प्रत्येक एकक स्थानी 0 आहे.



तिने एकक स्थानी 0 असलेल्या आणखी काही संख्या पाहिल्या. उदा., 100, 1000, 3200, 7010 इ. तिच्या असे लक्षात आले की या संख्या पण 10 विभाज्य आहेत.

अशाप्रकारे तिला हे समजले की जर एखाद्या संख्येच्या एकक स्थानी 0 असेल तर ती संख्या 10 ने विभाज्य असते.

तुम्ही 100 ने विभाज्यतेचा एखादा नियम काढू शकता का?

**5 ने विभाज्यता :** मणिने 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ..... या संख्यांमध्ये एक मजेशीर आकृतिबंध (pattern) पाहिला. तुम्हांला तो पॅटर्न सांगता येईल का? या सर्व संख्यांमध्ये एकक स्थानी एक तर 0 किंवा 5 अंक आहेत. तिला हे समजले की, या सर्व संख्या 5 ने विभाज्य आहेत.

त्याने 5 ने विभाज्य असलेल्या आणखी काही संख्या घेतल्या. उदा. 100, 215, 6205, 3500 इ. या संख्यांमध्येदेखील एकक स्थानी 0 किंवा 5 आहेत.

त्याने 23, 56 आणि 97 ला 5 ने भाग देण्याचा प्रयत्न केला. हे त्याला शक्य होईल का? पडताळून पाहा. त्याच्या असे लक्षात आले की, जर एखाद्या संख्येच्या एकक स्थानी 0 किंवा 5 असतील तर ती संख्या 5 ने विभाज्य असते.

1750125 ही 5 ने विभाज्य आहे का?

**2 ने विभाज्यता :** चारूने 2 च्या काही विभाज्यांचे निरीक्षण केले. 10, 12, 14, 16,..... तसेच 2410, 4356, 1358, 2972, 5974 इ. यांत तिला एक पॅटर्न दिसला. तुम्ही सांगू शकाल? या संख्यांच्या एकक स्थानी 0, 2, 4, 6, 8 यांपैकीच अंक असतो.

तो यांना भाग देऊन बाकी 0 येते का हे पडताळून पाहते.

या सर्व उदाहरणांवरून असा निष्कर्ष निघतो की, जर एखाद्या संख्येच्या एकक स्थानी 0, 2, 4, 6, 8 यांपैकी अंक असेल तर ती संख्या 2 ने विभाज्य असते.

**3 ने विभाज्यता :** 21, 27, 36, 54 आणि 219 या संख्या 3 ने विभाज्य आहेत का? होय.

25, 37 आणि 260 या 3 ने विभाज्य आहेत का? नाही.

3 ने विभाज्यतेसाठी तुम्हांला एकक स्थानात काही पॅटर्न दिसत नाही. कारण एकक स्थानात समान अंक असूनही 3 ने विभाज्य होतेपण आणि नसतेपण.

जसे की 27 ही 3 ने विभाज्य आहे, पण 17, 37 या संख्या 3 ने विभाज्य नाहीत.

आता तुम्ही 21, 36, 54 आणि 219 मधील अंकांची बेरीज करा.  $2 + 1 = 3$ ,  $3 + 6 = 9$ ,  $5 + 4 = 9$ ,  $2 + 1 + 9 = 12$ . या सर्व बेरजा 3 ने विभाज्य आहेत.

25, 37, 260 यांच्या अंकांच्या बेरजा करा.  $2 + 5 = 7$ ,  $3 + 7 = 10$ ,  $2 + 6 + 0 = 8$  या बेरजा 3 ने विभाज्य नाही.

म्हणून आपण म्हणतो की, जर एखाद्या संख्येतील अंकांची बेरीज 3 ने विभाज्य असेल तर पूर्ण संख्यादेखील 3 ने विभाज्य असते.

7221 ही संख्या 3 ने विभाज्य आहे का?

**6 ने विभाज्यता :** तुम्ही अशी एखादी संख्या सांगू शकता का जी 2 आणि 3 या दोन्हींनी विभाज्य आहे? 18 ही अशी संख्या आहे. मग  $2 \times 3$  च्या गुणाकाराने म्हणजे 6 ने 18 विभाज्य होते का? होय. होतेच.

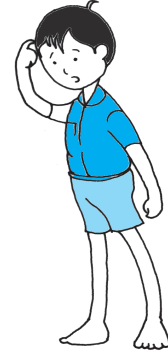
18 सारख्या आणखी काही संख्या पाहा. पडताळून पाहा की त्या 6 ने विभाज्य आहेत का?

अशी एखादी संख्या शोधा की जी 2 ने विभाज्य आहे पण 3 ने नाही.

आता अशी एक संख्या घ्या जी 3 ने विभाज्य आहे, पण 2 ने नाही. उदा., 27.

27 ही 6 ने विभाज्य होते का? नाही. अशाच आणखी काही संख्या शोधा.

यातून आपण असा निष्कर्ष काढतो की, **जर एखादी संख्या 2 आणि 3 ने विभाज्य असेल ती संख्या 6 ने देखील विभाज्य असते.**



**4 ने विभाज्यता :** तुम्ही एखादी तीन अंकी 4 ने विभाज्य असलेली संख्या सांगू शकता का?

उदा., 212. आता एखादी चार अंकी 4 ने विभाज्य असलेली संख्या सांगा. उदा., 1936 ही संख्या.

212 च्या दशक व एकक स्थानी असलेल्या अंकांनी तयार होणारी संख्या पाहा. ती 12 आहे आणि 12 ही 4 ने विभाज्य आहे. 1936 मध्ये 36 आहे; जी 4 ने विभाज्य आहे. ही क्रिया 4612; 3516; 9532 वर करून पाहा.

286 ही 4 ने विभाज्य आहे का? नाही. कारण 86 ही 4 ने विभाज्य नाही.

म्हणून शेवटी आपण असे म्हणतो की, **3 किंवा जास्त अंकी संख्यांच्या दशक व एकक स्थानांतील अंकांनी बनलेल्या संख्येला 4 ने भाग गेला तर ती संख्या 4 ने विभाज्य असते.**

1 व 2 अंकी संख्यांची 4 ने विभाज्यता प्रत्यक्ष 4 ने भाग देऊनच पाहावी लागते.

**8 ने विभाज्यता :** 1000, 2104, 1416 या संख्या 8 ने विभाज्य आहेत का? होय.

या संख्यांच्या एकक, दशक आणि शतक स्थानांतील अंकांनी बनलेल्या संख्यांना 000, 104, 416 यांना 8 ने भाग जातो. अशाच आणखी काही संख्या घेऊन ज्यांच्या शतक, दशक, एकक स्थानांतील अंकांपासून बनलेल्या संख्या पडताळून घ्या. उदा., 9216, 8216, 7216, 10216, 9995216 इ. या संख्या 8 ने विभाज्य आहेत.

आपल्या लक्षात येते की, 4 किंवा जास्त अंकी संख्या 8 ने विभाज्य असते तर शेवटच्या तीन अंकांपासून बनलेली संख्या 8 ने विभाज्य असेल.

73512 ही 8 ने विभाज्य आहे का?

1, 2 व 3 अंकी संख्यांची 8 ने विभाज्यता पडताळून पाहण्यासाठी प्रत्यक्ष 8 ने भाग द्यावा लागतो.

**9 ने विभाज्यता :** 9 चे विभाज्य 9, 18, 27, 36, 45, 54,... आहेत. म्हणजेच या संख्या 9 ने विभाज्य आहेत. आणखी काही संख्या 4608, 5283 यादेखील 9 ने विभाज्य आहेत.

या संख्येच्या अंकांच्या बेरजेमध्ये काही पॅटर्न दिसतो का? होय.

$$1 + 8 = 9, 2 + 7 = 9, 3 + 6 = 9, 4 + 5 = 9,$$

$$4 + 6 + 0 + 8 = 18, 5 + 2 + 8 + 3 = 18$$

या सर्व बेरजा 9 ने विभाज्य आहेत.

758 ही 9 ने विभाज्य आहे का? नाही.

$$7 + 5 + 8 = 20 \text{ ही } 9 \text{ ने विभाज्य नाही.}$$

या उदाहरणांच्या आधारे आपण म्हणू शकतो की, जर एखादी संख्येतील अंकांची बेरीज 9 ने विभाज्य असेल तर ती संख्या 9 ने विभाज्य असते.

**11 ने विभाज्यता :** 308, 1331 आणि 61809 या तीनही संख्या 11 ने विभाज्य आहेत.

आपण एक तक्ता बनवून निरीक्षण केल्यास त्या संख्येतील अंकांमध्ये काही समानता दिसते का?

संख्या	उजवीकडून विषम स्थानातील अंकांची बेरीज	उजवीकडून सम स्थानातील अंकांची बेरीज	फरक
308	$8 + 3 = 11$	0	$11 - 0 = 11$
1331	$1 + 3 = 4$	$3 + 1 = 4$	$4 - 4 = 0$
61809	$9 + 8 + 6 = 23$	$0 + 1 = 1$	$23 - 1 = 22$

आपल्याला असे दिसून येते की प्रत्येक परिस्थितीत फरक 0 किंवा 11 ने विभाज्य आहे.

5081 मध्ये  $(8 + 5) - (1 + 0) = 12$  येते जी 11 ने विभाज्य नाही. म्हणून 5081 देखील 11 ने विभाज्य नाही. याचा पडताळा 5081 ला 11 ने भाग देऊन पाहू शकतो.

अशा प्रकारे, एखाद्या संख्येची 11 ने विभाज्यता पडताळून पाहण्यासाठी उजवीकडून विषम स्थानांतील अंकांची बेरीज व सम स्थानांतील अंकांची बेरीज काढून घेऊन त्यांमधील फरक 0 किंवा 11 ने विभाज्य असेल तर ती संख्या 11 ने विभाज्य असते.



## उदाहरणसंग्रह 3.3

1. विभाज्यतेच्या कसोट्यांचा वापर करून खालीलपैकी कोणत्या 2 ने विभाज्य 3 ने, 4 ने, 5 ने, 6 ने, 8 ने, 9 ने 10 ने किंवा 11 ने विभाज्य आहेत (किंवा नाहीत) हे सांगा.

संख्या	विभाज्य आहेत								
	2 ने	3 ने	4 ने	5 ने	6 ने	8 ने	9 ने	10 ने	11 ने
128	होय	नाही	होय	नाही	नाही	होय	नाही	नाही	नाही
990	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
1586	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
275	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
6686	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
639210	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
429714	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
2856	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
3060	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
406839	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

2. विभाज्यतेच्या कसोट्यांचा वापर करून खालीलपैकी कोणत्या संख्या 4 ने विभाज्य आहेत आणि कोणत्या 8 ने विभाज्य आहेत हे पाहा.
- (a) 572                      (b) 726352                      (c) 5500                      (d) 6000  
 (e) 12159                      (f) 14560                      (g) 21084                      (h) 31795072  
 (i) 1700                      (j) 2150
3. विभाज्यतेच्या कसोट्या वापरून पुढीलपैकी कोणत्या संख्या 6 ने विभाज्य आहेत हे पाहा.
- (a) 297144                      (b) 1258                      (c) 4335                      (d) 61233  
 (e) 901352                      (f) 438750                      (g) 1790184                      (h) 12583  
 (i) 639210                      (j) 17852
4. विभाज्यतेच्या कसोट्यांद्वारे कोणत्या संख्या 11 ने विभाज्य आहेत ते पाहा.
- (a) 5445                      (b) 10824                      (c) 7138965  
 (d) 70169308                      (e) 10000001                      (f) 901153
5. खालील दिलेल्या रिकाम्या जागी सर्वात लहान अंक लिहा ज्यामुळे संख्या 3 ने विभाज्य होईल.
- (a) \_\_\_\_ 6724                      (b) 4765 \_\_\_\_ 2
6. खालील रिकाम्या जागी असा अंक लिहा ज्यामुळे संख्या 11 ने विभाज्य होईल.
- (a) 92 \_\_\_\_ 389                      (b) 8 \_\_\_\_ 9484

### 3.5 सामाईक अवयव आणि सामाईक विभाज्य

काही संख्यांच्या जोड्यांतील अवयव पाहा.

(a) 4 आणि 18 चे अवयव कोणते आहेत?

4 चे अवयव = 1, 2, 4

18 चे अवयव = 1, 2, 3, 6, 9, 18

दोन्ही संख्यांचे 1 आणि 2 हे अवयव आहेत. म्हणजेच 1 आणि 2 हे 4 व 18 चे सामाईक अवयव (Common factors) आहेत.

#### प्रयत्न करा

खाली दिलेल्या जोड्यांचे सामाईक अवयव कोणते?

(a) 8, 20                      (b) 9, 15

(b) 4 आणि 15 चे सामाईक अवयव कोणते?

या दोन्हीमध्ये केवळ 1 हाच सामाईक अवयव आहे.

7 आणि 16 मध्ये सामाईक अवयव कोणते?

ज्या दोन संख्यांमध्ये केवळ 1 हाच सामाईक अवयव असतो, अशा संख्यांना सहमूळ संख्या (co-prime numbers) म्हणतात.

4 आणि 15 सहमूळ संख्या आहेत.

7 आणि 15, 12 आणि 49, 18 आणि 23 या सहमूळ संख्या आहेत का?

(c) 4, 12, 16 चे सामाईक अवयव काढा.

4 चे अवयव = 1, 2, 4

12 चे अवयव = 1, 2, 3, 4, 6, 12

16 चे अवयव = 1, 2, 4, 8, 16

सामाईक अवयव = 1, 2, 4

खालील संख्यांचे सामाईक अवयव कोणते?

(a) 8, 12, 20                      (b) 9, 15, 21

आता एकपेक्षा जास्त संख्यांचे विभाज्य घेऊन पाहू.

(a) 4 आणि 6 चे विभाज्य कोणते?

4 चे विभाज्य = 4, 8, 12, 16, 20, 24, ... (आणखी विभाज्य लिहा)

6 चे विभाज्य = 6, 12, 18, 24, 30, 36, ... (आणखी विभाज्य लिहा)

यामध्ये अशा काही संख्या आहेत का की ज्या दोन्हीकडे आहेत. आपल्याला असे दिसून येईल की 12, 24, 36, ... 4 आणि 6 चे दोन्हीचे विभाज्य आहेत.

तुम्हांला असे आणखी विभाज्य लिहिता येतील का?

12, 24, 36, ... हे 4 आणि 6 चे सामाईक विभाज्य (Common multiples) आहेत.

- (b) 3, 5 आणि 6 चे सामाईक विभाज्य लिहा.  
 3 चे विभाज्य 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, ... आहेत.  
 5 चे विभाज्य 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ... आहेत.  
 6 चे विभाज्य 6, 12, 18, 24, 30, ... आहेत.  
 3, 5 आणि 6 चे सामाईक विभाज्य 30, 60, 90, .... आहेत.  
 3, 5 आणि 6 चे आणखी काही सामाईक विभाज्य लिहा.

**उदाहरण 5** : 75, 60 आणि 210 चे सामाईक विभाजक काढा.

**उत्तर** : 75 चे विभाजक 1, 3, 5, 15, 25 आणि 75 आहेत.

60 चे विभाजक 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 आणि 60

210 चे विभाजक 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105 आणि 210 आहेत.

याप्रमाणे 75, 60 आणि 210 चे सामाईक विभाजक 1, 3, 5 आणि 15 आहेत.

**उदाहरण 6** : 3, 4 आणि 9 चे सामाईक विभाज्य काढा.

**उत्तर** : 3 चे विभाज्य 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, ... आहेत.

4 चे विभाज्य 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, ... आहेत.

9 चे विभाज्य 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, ... आहेत.

खात्रीने 3, 4 आणि 9 चे सामाईक विभाज्य 36, 72, 108, ... आहेत.



### उदाहरणसंग्रह 3.4

- खालील संख्यांचे सामाईक विभाजक काढा.  
 (a) 20 आणि 28                      (b) 15 आणि 25  
 (c) 35 आणि 50                      (d) 56 आणि 120
- खालील संख्यांचे सामाईक विभाजक काढा.  
 (a) 4, 8 आणि 12                      (b) 5, 15 आणि 25
- खालील संख्यांचे पहिले तीन सामाईक विभाज्य काढा.  
 (a) 6 आणि 8                              (b) 12 आणि 18
- 3 आणि 4 च्या सामाईक विभाज्य असलेल्या 100 पेक्षा लहान सर्व संख्या लिहा.
- खालीलपैकी कोणत्या संख्या सहमूळ आहेत?  
 (a) 18 आणि 35                      (b) 15 आणि 37                      (c) 30 आणि 415  
 (d) 17 आणि 68                      (e) 216 आणि 215                      (f) 81 आणि 16
- एका संख्येला 5 आणि 12 या दोन्ही संख्यांनी भाग जातो, तर अशी संख्या काढा की जिने त्या संख्येला नेहमी भाग जाईल.
- एका संख्येला 12 ने भाग जातो. आणखी अशा कोणत्या संख्या आहेत की त्यांनी त्या संख्येला भाग जाईल?



### 3.6 विभाज्यतेचे आणखी काही नियम

संख्यांच्या विभाज्यतेचे आणखी काही नियम पाहू.

- (i) तुम्ही 18 चा एक विभाजक सांगू शकता का? तो 9 आहे. 9 चा एक विभाजक लिहा. तो 3 आहे. तो 18 चा विभाजक आहे का? हो, आहे. 18 चा दुसरा विभाजक सांगा. हा 6 आहे. 6 चा एक विभाजक सांगा. तो 2 आहे. हा 18 चा ही एक विभाजक आहे. याची पडताळणी 18 च्या अन्य विभाजकांसाठीही करा.

हीच क्रिया 24 साठी करा. ही 8 ने विभाज्य आहे. तसेच 24 या संख्येला 8 च्या सर्व विभाजकांनी म्हणजे 1,2,4 आणि 8 ने विभाज्य आहे.

म्हणून आपण म्हणू शकतो की, कोणतीही संख्या एका संख्येने विभाज्य असेल तर ती संख्या या संख्येच्या विभाजकांनीही विभाज्य असेल.

- (ii) 80 ही संख्या 4 व 5 दोन्हींनी विभाज्य आहे. ही  $4 \times 5 = 20$  नेही विभाज्य आहे तसेच 4 आणि 5 सहमूळ संख्या आहेत.

याचप्रमाणे 60, सहमूळ संख्या 3 आणि 5 यांना विभाज्य आहे. 60 ही  $3 \times 5 = 15$  नेही विभाज्य आहे.

म्हणून आपण म्हणू शकतो की, कोणतीही संख्या दोन सहमूळ संख्यांनी विभाज्य असेल तर ती त्या संख्यांच्या गुणाकाराने ही विभाज्य असते.

- (iii) दोन संख्या 16 आणि 20 संख्या 4 ने विभाज्य आहेत.  $16 + 20 = 36$  ही संख्या सुद्धा 4 ने विभाज्य आहे याची पडताळणी संख्यांच्या अजून जोड्या घेऊन करा.

16 आणि 20 च्या इतर सामाईक विभाजकांसाठीही पडताळणी करा. याप्रमाणे, जर दिलेल्या दोन संख्या कुठल्याही एका संख्येने विभाज्य असतील तर या संख्यांची बेरीजही त्या संख्येने विभाज्य असते.

- (iv) दोन संख्या 35 आणि 20, संख्या 5 ने विभाज्य आहेत, तर यांची वजाबाकी  $35 - 20 = 15$  सुद्धा 5 ने विभाज्य असेल का? याची पडताळणी संख्यांच्या आणखी जोड्या घेऊन करा.

याप्रमाणे, जर दिलेल्या दोन संख्या एखाद्या संख्येने विभाज्य असतील तर त्या संख्यांची वजाबाकीसुद्धा त्या संख्येने विभाज्य असते. अन्य दोन संख्यांची जोडी घेऊन वर दिलेले चारही नियम पडताळून पाहा.

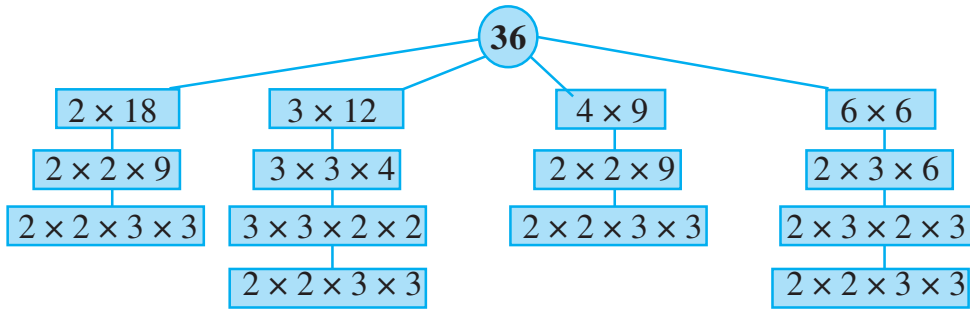
### 3.7 मूळ अवयव पाडणे

जर कोणतीही संख्या तिच्या विभाजकांच्या गुणाकार रूपात मांडली गेली तर त्या संख्येचे अवयव पाडले असे आपण म्हणतो. याप्रकारे जेव्हा आपण  $24 = 3 \times 8$  लिहितो तेव्हा 24 चे अवयव (विभाजक) पाडले असे आपण म्हणतो. ही 24 अवयवांची एक जोडी आहे. 24 चे अन्य अवयव खालीलप्रमाणे :

$24 = 2 \times 12$ $= 2 \times 2 \times 6$ $= 2 \times 2 \times 2 \times 3$	$24 = 4 \times 6$ $= 2 \times 2 \times 6$ $= 2 \times 2 \times 2 \times 3$	$24 = 3 \times 8$ $= 3 \times 2 \times 2 \times 2$ $= 2 \times 2 \times 2 \times 3$
---	--	---

24 च्या सर्व अवयवांत आपण शेवटी  $2 \times 2 \times 2 \times 3$  या अवयवांपर्यंत पोहोचतो. या अवयवांत फक्त 2 आणि 3 हेच विभाजक आहेत आणि त्या मूळ संख्या आहेत. कोणत्याही संख्येचा असे मूळ अवयव काढणे (prime factorisation) असे म्हणतात.

याची पडताळणी 36 ही संख्या घेऊन करू.



36 चे मूळ विभाजक आहेत  $2 \times 2 \times 3 \times 3$ . हे 36 चे केवळ एकच मूळ विभाजक आहेत.

**प्रयत्न करा**

16, 28 आणि 38 चे मूळ विभाजक लिहा.

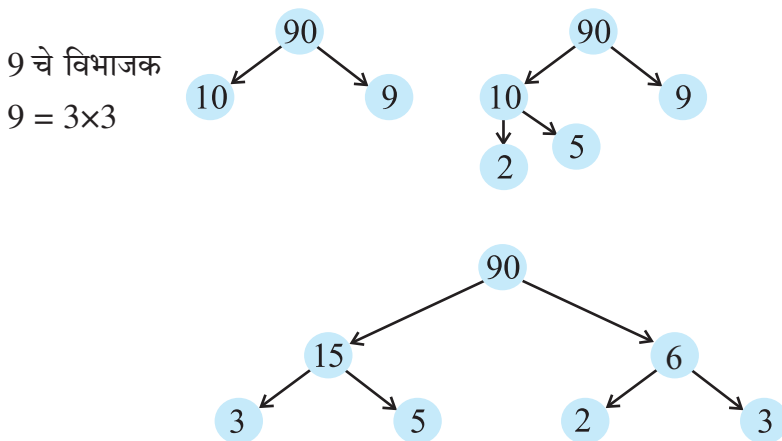
**हे करा**

**विभाजक वृक्ष (Factor Tree)**

कोणतीही संख्या घ्या व ती लिहा  
90

तिची कोणतीही विभाजक जोडी घ्या, जसे की  
 $90 = 10 \times 9$

आता 10 ची विभाजकांची एक जोडी घ्या, जसे  
 $10 = 2 \times 5$



असेच खालील संख्या घेऊन करा.

(a) 8 (b) 12

**उदाहरण 7** : 980 चे मूळ विभाजक काढा.

**उत्तर** : आपण खालीलप्रमाणे करू.

आपण 980 ला 2, 3, 5, 7 इत्यादींनी याच क्रमाने पुन्हा पुन्हा भाग देऊ. ही किमया भाग जात आहे तोपर्यंत करू.

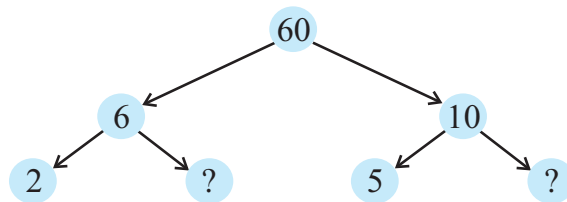
2	980
2	490
5	245
7	49
7	7
	1

याप्रकारे 980 चे मूळ विभाजक  $980 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 7$

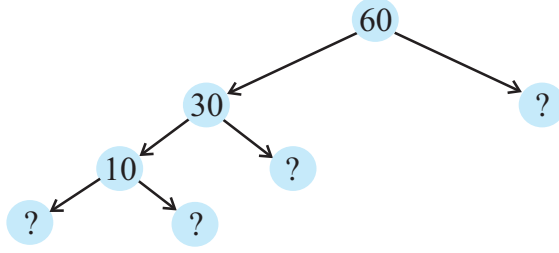


### उदाहरणसंग्रह 3.5

- खालीलपैकी कोणती विधाने सत्य आहेत?
  - जर एखादी संख्या 3 ने विभाज्य असेल तर 9 नेही विभाज्य असते.
  - जर एखादी संख्या 9 ने विभाज्य असेल तर 3 नेही नक्की विभाज्य असेल.
  - जर एखादी संख्या 18 ने विभाज्य आहे, तर ते ती संख्या 3 आणि 6 या दोन्हींनीही विभाज्य असेल.
  - जर एक संख्या 9 आणि 10 ने विभाज्य असेल तर ती 90 नेही विभाज्य असेल.
  - जर दोन संख्या सहमूळ असतील तर त्यात किमान एक तरी नक्कीच मूळ संख्या असेल.
  - 4 ने विभाज्य सर्व संख्या 8 ने सुद्धा विभाज्य असतील.
  - 8 ने विभाज्य सर्व संख्या 4 ने सुद्धा विभाज्य असतील.
  - एका संख्येने दोन संख्यांना वेगवेगळा पूर्णपणे भाग जात असेल तर त्यांच्या बेरजेलाही त्या संख्येने पूर्णपणे भाग जाईल.
  - एखाद्या संख्येने दोन संख्यांच्या बेरजेला पूर्णपणे भाग जात असेल तर त्या संख्येने त्या दोन संख्यांना वेगवेगळा पूर्णपणे भाग जाईल.
- इथे 60 चे दोन भिन्न-भिन्न विभाजक वृक्ष दिले आहेत.
  -



(b)



3. एका संयुक्त संख्येच्या मूळ विभाजकांमध्ये कोणत्या विभाजकांचा समावेश केला जात नाही?
4. चार अंकी सर्वात मोठी संख्या लिहा आणि ती मूळ अवयवांचा गुणाकार रूपात व्यक्त करा.
5. पाच अंकी सर्वात लहान संख्या लिहा आणि ती मूळ अवयवांचा गुणाकार रूपात व्यक्त करा.
6. 1729 चे सर्व मूळ विभाजक काढा आणि संख्या मूळ विभाजनांच्या गुणाकार रूपात लिहा.
7. तीन क्रमागत संख्यांचा गुणाकार नेहमी 6 ने विभाज्य असतो. या विधानाचे काही उदाहरणांच्या साहाय्याने स्पष्टीकरण करा.
8. दोन क्रमागत विषम संख्यांची बेरीज 4 ने विभाज्य असते. काही उदाहरणे घेऊन या विधानाची सत्यता पडताळून पहा.
9. खालीलपैकी कोणत्या विधानांमध्ये मूळ अवयव काढले आहेत.
  - (a)  $24 = 2 \times 3 \times 4$
  - (b)  $56 = 1 \times 7 \times 2 \times 2 \times 2$
  - (c)  $70 = 2 \times 5 \times 7$
  - (d)  $54 = 2 \times 3 \times 9$
10. भागाकार न करता 25110 ही संख्या 45 ने विभाज्य आहे का ते ठरवा.  
[सूचना : 5 आणि 9 सहमूळ संख्या आहेत. दिलेल्या संख्येची 5 आणि 9 साठी विभाज्यता तपासून पहा.]
11. 18 ही संख्या 2 आणि 3 या दोन्हींनी विभाज्य आहे. ती  $2 \times 3 = 6$  ने ही विभाज्य आहे. याप्रमाणे एक संख्या 4 आणि 6 दोन्हींनी विभाज्य आहे. तर ती संख्या  $4 \times 6 = 24$  नेही विभाज्य आहे असे आपण म्हणू शकतो का? जर नसेल तर उत्तराच्या समर्थनार्थ एक उदाहरण द्या.
12. मी चार वेगवेगळे मूळ अवयव असलेली सर्वात लहान संख्या आहे. तुम्ही मला शोधू शकाल का?

### 3.8 महत्तम सामाईक विभाजक

आपण दोन संख्यांचे सामाईक विभाजक काढायला शिकलो. आता आपण या सामाईक विभाजकातील सर्वात मोठा विभाजक शोधण्याचा प्रयत्न करू.

12 आणि 16 चे सामाईक विभाजक काय आहेत? ते आहेत 1, 2 आणि 4.

या सामाईक विभाजकात सर्वात मोठा कोणता आहे? तो 4 आहे. 20, 28 आणि 36 चे सामाईक विभाजक काय आहेत? ते 1, 2 आणि 4 आहेत. यातही पुन्हा 4 हा सर्वात मोठा विभाजक आहे.

दोन किंवा दोनपेक्षा अधिक संख्यांच्या सामाईक विभाजकातील सर्वात मोठा सामाईक विभाजक महत्तम सामाईक विभाजक (highest common factor) म्हणतात. संक्षेपात म.सा.वि. (किंवा HCF) लिहितात. याला महत्तम (सर्वात मोठा) सामाईक भाजक (greatest common divisor) किंवा (GCD) सुद्धा म्हणतात.

### प्रयत्न करा

खालील संख्यांचा म.सा.वि. काढा.

(i) 24 आणि 36

(ii) 15, 25 आणि 30

(iii) 8 आणि 12

(iv) 12, 16 आणि 28

20, 28 आणि 36 चा म.सा.वि. त्या संख्यांच्या मूळ विभाजकांद्वारे असा काढला जाऊ शकतो.

2	20
2	10
5	5
	1

2	28
2	14
7	7
	1

2	36
2	18
3	9
3	3
	1

याप्रकारे

$$20 = 2 \times 2 \times 5$$

$$28 = 2 \times 2 \times 7$$

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

20, 28 आणि 36 मध्ये सामाईक विभाजक 2 (दोन वेळा येतो) आहे.

20, 28 आणि 36 चा म.सा.वि.  $2 \times 2 = 4$  आहे.



### उदाहरणसंग्रह 3.6

1. खालील संख्यांचे म.सा.वि. काढा.

(a) 18, 48

(b) 30, 42

(c) 18, 60

(d) 27, 63

(e) 36, 84

(f) 34, 102

(g) 70, 105, 175

(h) 91, 112, 49

(i) 18, 54, 81

(j) 12, 45, 75

2. खालील संख्यांचे म.सा.वि. काय असतील?

(a) क्रमाने येणाऱ्या दोन संख्या

(b) दोन क्रमागत समसंख्या

(c) दोन क्रमागत विषम संख्या

3. मूळ विभाजक पद्धती द्वारा दोन सहमूळ संख्या 4 आणि 15 चा म.सा.वि. या पद्धतीने काढला गेला :

$$4 = 2 \times 2 \text{ आणि } 15 = 3 \times 5$$

या विभाजकामध्ये कोणताही मूळ विभाजक सामाईक विभाजक नाही. म्हणून 4 आणि 15 चा म.सा.वि. शून्य आहे. हे उत्तर बरोबर आहे का? जर नसेल तर योग्य म.सा.वि. काय आहे?

### 3.9 लघुतम सामाईक विभाज्य

4 आणि 6 चे सामाईक विभाज्य काय आहेत? ते 12, 24, 36, ... आहेत. यातील सर्वांत लहान विभाज्य कोणता आहे. तो 12 आहे. आपण म्हणतो की, 4 आणि 6 चा सर्वांत लहान विभाज्य किंवा लघुतम सामाईक विभाज्य (lowest common multiple) 12 आहे. ही दोन्ही संख्यांची लहानात लहान विभाज्य संख्या आहे. दिलेल्या दोन किंवा दोनापेक्षा जास्त संख्यांचा लघुतम सामाईक विभाज्य त्या संख्यांचा सामाईक विभाज्यामधील सर्वांत लहान (लघुतम किंवा कमीत कमी) विभाज्य असतो. थोडक्यात, त्याला ल.सा.वि. (LCM) असे लिहितात. 8 आणि 12 चा ल.सा.वि. काय आहे? 4 आणि 9 चा ल.सा.वि. काय आहे? 6 आणि 7 चा ल.सा.वि. काय आहे?

**उदाहरण 8** : 12 आणि 18 चा ल.सा.वि. काढा.

**उत्तर** आपल्याला माहित आहे की, 12 आणि 18 चे सामाईक विभाज्य 36, 72, 108 इत्यादी आहेत. यातील 36 सर्वांत लहान आहे. हे आणखी एका पद्धतीने काढू :  
12 आणि 18 चे मूळ विभाजक हे आहेत :

$$12 = 2 \times 2 \times 3 \quad 18 = 2 \times 3 \times 3$$

या मूळ विभाजकांमध्ये, मूळ विभाजक 2 हा जास्तीत जास्त दोन वेळा येतो. (हा 12 च्या विभाजकांमध्ये आहे.) याप्रकारे मूळ विभाजक 3 हा जास्तीत जास्त दोन वेळा येतो. (हा 18 च्या विभाजकांमध्ये आहे.) दोन संख्यांचा ल.सा.वि. हा त्या संख्यांमध्ये जास्तीत जास्त वेळा येणाऱ्या मूळ विभाजकांचा गुणाकार आहे. म्हणून यांचा ल.सा.वि. =  $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$  आहे.

**उदाहरण 9** : 24 आणि 90 चा ल.सा.वि. काढा.

**उत्तर** :  $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \quad 90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

या मूळ विभाजकांमध्ये, मूळ विभाजक 2 जास्तीत जास्त तीन वेळा आला आहे. (हा 24 मध्ये आहे) मूळ विभाजक 3 जास्तीत जास्त दोन वेळा आला आहे. (हा 90 मध्ये आहे.) आणि मूळ विभाजक 5 केवळ एकदा 90 मध्ये आला आहे. म्हणून इच्छित ल.सा.वि. =  $(2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5 = 360$

**उदाहरण 10** : 40, 48 आणि 45 चा ल.सा.वि. काढा.

**उत्तर** : 40, 48 आणि 45 चे मूळ विभाजक याप्रमाणे :

$$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$45 = 3 \times 3 \times 5$$

मूळ विभाजक 2 जास्तीत जास्त चार वेळा (हा 48 मध्ये आहे), मूळ विभाजक 3 जास्तीत जास्त दोन वेळा (हा 45 मध्ये आहे) आणि मूळ विभाजक 5 केवळ एकदा (हा 40 व 45 दोन्ही मध्ये आहे) येतो.

म्हणून इच्छित ल.सा.वि. =  $(2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3) \times 5 = 720$

लघुतम साधारण विभाज्य (ल.सा.वि.) आणखी एका पद्धतीनेही काढता येतो. ती पुढील उदाहरणात दाखवली आहे.

**उदाहरण 11** : 20, 25 आणि 30 चा ल.सा.वि. काढा.

**उत्तर** : आपण संख्या एका ओळीत खाली दाखवल्याप्रमाणे लिहून घेऊ.

2	20	25	30	(a)
2	10	25	15	(b)
3	5	25	15	(c)
5	5	25	5	(d)
5	1	5	1	(e)
	1	1	1	

म्हणून, ल.सा.वि. =  $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 300$

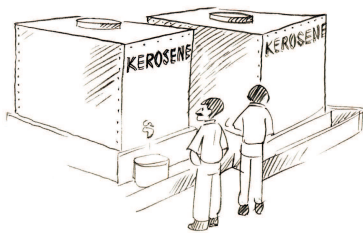
- (a) (सर्वात लहान मूळ विभाजक 2 ने भाग द्या. 25 ही संख्या 2 ने विभाज्य नाही. म्हणून ती पुढच्या ओळीत जशीच्या तशी लिहिली जाते.)
- (b) (पुन्हा 2 ने भाग द्या. 2 चे विभाज्य आहेत तोपर्यंत ही कृती चालू ठेवा.)
- (c) (पुढची मूळ विभाजक संख्या 3 ने भाग द्या.)
- (d) (पुढची मूळ विभाजक संख्या 5 ने भाग द्या.)
- (e) (पुन्हा 5 ने भागा.)

### 3.10 म.सा.वि. आणि ल.सा.वि. वरील काही उदाहरणे

अनेक परिस्थिती आपल्यासमोर येतात, ज्यामध्ये आपण म.सा.वि., ल.सा.वि. या संकल्पनांचा वापर करतो. आपण काही उदाहरणे पाहू.

**उदाहरण 12** : दोन टँकरमध्ये (tankers) अनुक्रमे 850 लीटर आणि 680 लीटर रॉकेल आहे. अशा एका मोठ्यांत मोठ्या भांड्याची धारकता काढा की दोन्ही टँकरमधील रॉकेलचे आकारमान त्या धारकतेच्या पूर्ण पटीत असेल.

**उत्तर** : इच्छित भांड्याने दोन्ही टँकरमधील तेल पूर्णपणे मोजायचे आहे. म्हणून त्याची धारकता दोन्ही टँकरच्या धारकतेची पूर्णपणे विभाजक असेल. याखेरीज ही धारकता जास्तीत जास्त हवी. म्हणून अशा भांड्याची जास्तीत जास्त धारकता 850 आणि 680 चा म.सा.वि. असेल. तो या पद्धतीने काढता येईल.



2	850	2	680
5	425	2	340
5	85	2	170
17	17	5	85
	1	17	17
			1

म्हणून

$$850 = 2 \times 5 \times 5 \times 17 = \boxed{2} \times \boxed{5} \times \boxed{17} \times 5$$

$$680 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 17 = \boxed{2} \times \boxed{5} \times \boxed{17} \times 2 \times 2$$

850 आणि 680 चे सामाईक विभाजक 2, 5 आणि 17 आहेत.

म्हणून 850 आणि 680 चा म.सा.वि.  $2 \times 5 \times 17 = 170$  आहे.

इच्छित भांड्याची जास्तीत जास्त धारकता 170 लीटर आहे. हे माप 5 वेळा पूर्ण भरल्यावर पहिला टँकर आणि 4 वेळा पूर्ण भरल्यावर दुसरा टँकर भरेल.

**उदाहरण 13 :** सकाळच्या फिरण्याच्या वेळी तीन व्यक्ती एकाच वेळी चालायला प्रारंभ करतात. त्यांच्या लगतच्या पावलांतील अंतर क्रमशः 80 सेमी, 85 सेमी, 90 सेमी आहे. ते कमीत कमी किती अंतर चालले म्हणजे प्रत्येकाने टाकलेल्या पावलांची संख्या पूर्णांकात असेल.

**उत्तर :** प्रत्येक व्यक्ती चाललेले अंतर समान आणि कमीत कमी हवे आहे. हे प्रत्येक व्यक्तीने चाललेले कमीत कमी अंतर म्हणजे त्यांच्या पावलांचा ल.सा.वि. आहे. तुम्ही का ते सांगू शकाल का ?



म्हणून आपण 80, 85 आणि 90 चा ल.सा.वि. काढू. 80, 85 आणि 90 चा ल.सा.वि. 12240 आहे.

म्हणून इच्छित कमीत कमी अंतर 12240 सेमी आहे.

**उदाहरण 14 :** अशी सर्वात लहान संख्या काढा की जिला 12, 16, 24 आणि 36 ने भागल्यावर प्रत्येक वेळी 7 बाकी उरेल.

**उत्तर :** आपण 12, 16, 24 आणि 36 चा ल.सा.वि. खालील प्रकारे काढू.

2	12	16	24	36
2	6	8	12	18
2	3	4	6	9
2	3	2	3	9
3	3	1	3	9
3	1	1	1	3
	1	1	1	1

याप्रकारे, ल.सा.वि. =  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 144$

144 ही सर्वात लहान संख्या आहे, जिला 12, 16, 24 आणि 36 ने भाग दिल्यावर प्रत्येक वेळी 0 बाकी उरेल.

परंतु आपल्याला अशी सर्वात लहान संख्या हवी आहे जिला भागल्यावर प्रत्येक वेळी 7 बाकी उरेल. म्हणून इच्छित संख्या 144 पेक्षा 7 ने अधिक असेल.

याप्रमाणे, इच्छित सर्वात लहान संख्या =  $144 + 7 = 151$  आहे.





## उदाहरणसंग्रह 3.7

1. रेणू 75 किग्रॅ आणि 69 किग्रॅ वजनाच्या दोन खताच्या गोण्या खरेदी करते. जास्तीत जास्त वजनाच्या पूर्ण भरलेल्या खताच्या किती पिशव्या तयार करता येतील?
2. तीन मुले एकाच स्थानापासून चालायला प्रारंभ करतात. त्यांच्या लगतच्या पावलांतील अंतर क्रमशः 63 सेमी, 70 सेमी आणि 77 सेमी आहे. ते कमीत कमी किती अंतर चालले म्हणजे प्रत्येकाने टाकलेल्या पावलांची संख्या पूर्णांकात असेल?
3. एका खोलीची लांबी, रुंदी आणि उंची क्रमशः 825 सेमी 675 सेमी आणि 450 सेमी आहे. असा सर्वात लांब टेप शोधा की जो तिन्ही मितींना पूर्णांकात मोजेल.
4. 6, 8 आणि 12 ने विभाज्य तीन अंकी सर्वात लहान संख्या काढा.
5. 8, 10 आणि 12 ने विभाज्य तीन अंकी सर्वात मोठी संख्या काढा.
6. तीन वेगवेगळ्या चौकांतील ट्रॅफिक लाईट (traffic lights) क्रमशः प्रत्येक 48 सेकंदांनी, 72 सेकंदांनी आणि 108 सेकंदांनी बदलतात. जर ते सकाळी 7 वाजता एकाच वेळी बदलते, तर ते पुन्हा एकाच वेळी कधी बदलतील?
7. तीन टँकरमध्ये क्रमशः 403 लीटर, 434 लीटर, 465 लीटर डिझेल आहे. अशा एका मोठ्यांत मोठ्या भांड्याची धारकता काढा की दोन्ही टँकरमधील रॉकेलचे आकारमान धारकतेच्या पूर्ण पटीत असेल.
8. अशी सर्वात लहान संख्या काढा, की जिला 6, 15 किंवा 18 ने भाग दिल्यावर प्रत्येक वेळी 5 बाकी राहिल.
9. चार अंकी सर्वात लहान संख्या काढा, की जी 18, 24 आणि 32 ने विभाज्य आहे.
10. खालील संख्यांचा ल.सा.वि. काढा. ज्यामध्ये एक संख्या नेहमी 3 ने विभाज्य आहे.
 

(a) 9 आणि 4	(b) 12 आणि 5
(c) 6 आणि 5	(d) 15 आणि 4

मिळालेल्या ल.सा.वि. तील एक सामाईक गुणधर्म शोधा. प्रत्येक स्थितीत ल.सा.वि. दोन्ही संख्यांचा गुणाकार आहे का?
11. खालील संख्यांचा ल.सा.वि. काढा. ज्यामध्ये एक संख्या दुसऱ्या संख्येचा विभाजक आहे.
 

(a) 5, 20	(b) 6, 18
(c) 12, 48	(d) 9, 45

मिळालेल्या उत्तरावरून काय निष्कर्ष काढाल?



## आपण काय चर्चा केली?

1. विभाज्य आणि विभाजक असे ओळखावेत?
2. आपण चर्चा केली आणि खालील गोष्टी शोधल्या. -
  - (a) संख्येचा विभाजक त्या संख्येचा अवयव असतो.
  - (b) प्रत्येक संख्या स्वतः त्या संख्येची विभाजक असतेच. 1 हा प्रत्येक संख्येचा विभाजक असतो.
  - (c) दिलेल्या संख्येचा प्रत्येक विभाजक हा त्या संख्येपेक्षा लहान किंवा संख्येएवढा असतो.
  - (d) प्रत्येक संख्या ही आपल्या प्रत्येक विभाजकाची विभाज्य असते.
  - (e) दिलेल्या संख्येचा प्रत्येक विभाज्य त्या संख्येपेक्षा मोठा किंवा संख्येएवढा असतो.
  - (f) प्रत्येक संख्या ही स्वतःचा विभाज्य असते.
3. आपण शिकलो की -
  - (a) ज्या संख्येचे स्वतः ती संख्या आणि 1 असे दोनच विभाजक असतात तिला मूळ संख्या म्हणतात. ज्या संख्याचे दोनपेक्षा जास्त विभाजक असतात तिला संयुक्त संख्या म्हणतात.
  - (b) 2 ही सर्वात लहान मूळ संख्या, सम संख्या सुद्धा आहे. अन्य सर्व मूळ संख्या विषम आहेत.
  - (c) ज्या दोन संख्यांचा सामाईक विभाजक केवळ 1 आहे, त्यांना सहमूळ संख्या म्हणतात.
  - (d) जेव्हा एक संख्या दुसरीची विभाजक आहे, तेव्हा त्या संख्येचा प्रत्येक विभाजक दुसऱ्या संख्येचा विभाजक असतो.
  - (e) दोन सहमूळ संख्येने भाग जात असलेल्या संख्येला त्यांच्या गुणाकार संख्येनेही भाग जातो.
4. संख्यांना न भागता सुद्धा 2,3,4,5,8,9 आणि 11 या संख्यांसाठी विभाज्यता तपासून पाहता येते. संख्येतील अंक आणि त्यांची विविध संख्यांसाठीची विभाज्यता यातील संबंध आपण शोधला.
  - (a) 2,5 आणि 10 साठी केवळ एकक स्थान अंक पाहून विभाज्यता सांगता येते.
  - (b) संख्येतील अंकांच्या बेरजेने, 3 आणि 9 ची विभाज्यता सांगता येते.
  - (c) 4 ची विभाज्यता एकक आणि दशक स्थानच्या अंकांनी तर 8 ची विभाज्यता एकक, दशक आणि शतक स्थानच्या अंकांनी तपासता येते.
  - (d) 11 ची विभाज्यता सम आणि विषम स्थानच्या अंकांच्या बेरजेची तुलना करून ठरवता येते.
5. जर दोन संख्यांना एका संख्येने भाग जात असेल तर त्यांच्या बेरजेला आणि वजाबाकीलाही त्या संख्येने भाग जातो.
6. आपण शिकलो की -
  - (a) दोन किंवा अधिक संख्यांचा म.सा.वि (HCF) त्यांच्या सामाईक विभाजकातील सर्वात मोठा विभाजक असतो.
  - (b) दोन किंवा अधिक संख्यांचा ल.सा.वि (LCM) त्यांच्या सामाईक विभाजकातील सर्वात लहान विभाज्य असतो.