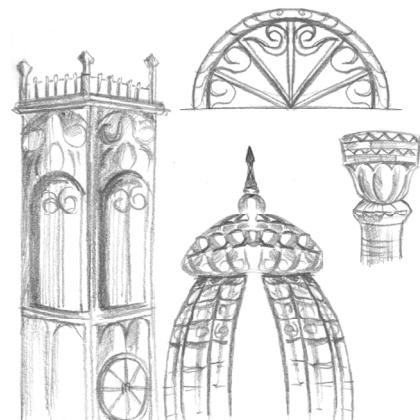


मूलभूत भूमितीय संकल्पना

4.1 प्रस्तावना

भूमितीला एक मोठा आणि संपन्न इतिहास आहे. भूमितीला इंग्रजी शब्द (Geometry) आणि ग्रीक शब्द (Geometron) आहे. (Geo) म्हणजे 'पृथ्वी' (भूमी/जमीन) '(Metron)' म्हणजे 'मापन'. इतिहासकारांच्या म्हणण्यानुसार प्राचीन काळात, भूमितीय संकल्पना बहुदा कला, वास्तुकला/शिल्पकला (Architecture) आणि भूमी (जमीन) मापनाच्या आवश्यकतांमुळे (गरजेमुळे) विकसित झाल्या असाव्यात.



शेतकऱ्यांच्या जमिनींच्या सीमरेषा (boundaries), तक्रारीला कोणतीही जागा न ठेवता निश्चित करण्याचे प्रसंगही यात समाविष्ट आहेत. वैभवपूर्ण राजप्रासाद, मंदिरे तळी, धरणे आणि नगरांची (शहरांची) निर्मिती, कला, वास्तुकला यांनी या संकल्पनांना आधार दिला, बळ दिले. अगदी आजसुदधा कला, मापन, वास्तुकला, अभियांत्रिकी (engineering), कापडाचे आकृतीबंध इ. च्या सर्व रूपात भूमितीय संकल्पनांचा प्रभाव दिसून येतो. तुम्ही विविध प्रकारच्या वस्तू, जसे की, बॉक्स, टेबल, पुस्तक शाळेत जाताना नेण्याचा जेवणाचा डबा, चेंदू ज्याच्याशी तुम्ही खेळता. पाहता आणि त्यांचा उपयोगही करता. या सगळ्या वस्तूंचे आकार (shapes) भिन्न भिन्न असतात. जी पट्टी (ruler) तुम्ही वापरता आणि ज्या पेन्सीलीने तुम्ही लिहिता, ज्या वस्तू सरळ (straight) आहेत. बांगडी, 1 रुपयाचं नाण, एक चेंदू यांची चित्रे वर्तुळाकृती (round) दिसतात.

इथे आपण काही मनोरंजक वस्तुस्थितीबाबत शिकू की जी आपल्या सभोवतीच्या आकारांबद्दल अधिक माहिती मिळविण्यासाठी मदत करतील.

4.2 बिंदू

कागदावर एका टोकदार पेन्सिलच्या टोकाने एक खूण (dot) करा. पेन्सिल जितकी टोकदार तितकी खूण सूक्ष्म (लहान) येईल. जवळ जवळ न दिसणारी खूण आपल्याला बिंदूंची संकल्पना देईल. बिंदू (point) एक स्थिती (location) दर्शवितो.

बिंदूसाठी काही उदाहरणे खालील प्रमाणे



कंपासचे टोक



पेन्सिलचे टोकदार
टोक



सुईचे टोकदार
टोक

समजा, तुम्ही एका कागदावर तीन बिंदू काढले, तर त्यांच्यातील फरक तुम्हाला समजायला हवा. म्हणून, त्यांना A, B, C इत्यादी इंग्रजी मोठ्या अक्षरांनी दाखवले जाते.

- B
या बिंदूंना बिंदू A, बिंदू B आणि बिंदू C असे वाचले जाते.
- A
- C
बिंदू निःसंशय खूप लहान हवेत.

प्रयत्न करा

1. पेन्सिलच्या टोकाने, एका कागदावर चार बिंदू काढा. तसेच त्यांना A,C,P आणि H ही नावे द्या. या बिंदूंना वेगवेगळ्या प्रकाराने नावे द्या. नावे देण्याचा एक प्रकार शेजारील आकृतीनुसार होऊ शकतो.

A. • C

P. • H

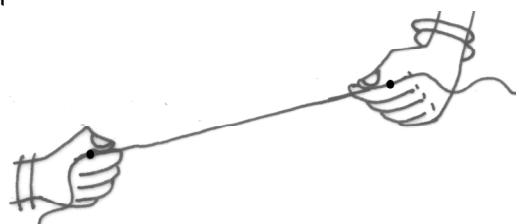
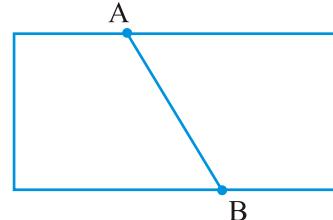
2. आकाशातील तारा आपल्याला बिंदूंची कल्पना देऊ शकतो. आपल्या दैनंदिन जीवनातील या प्रकारच्या पाच परिस्थिती लिहा.



4.3 रेषाखंड

एक कागद दुमडा आणि पुन्हा उघडा. त्यावर घडीची खूऱ्या आपल्याला दिसते का? यातूनच रेषाखंडाची कल्पना येते. याचे दोन अंत्यर्बिंदू (end points) A आणि B आहेत. एक पातळ दोरा घ्या. त्याच्या दोन्ही टोकांना ताणून घटू पकडा. हा एक रेषाखंड दाखवतो. हातांनी पकडलेली टोके या रेषाखंडाचे अंत्यर्बिंदू आहेत.

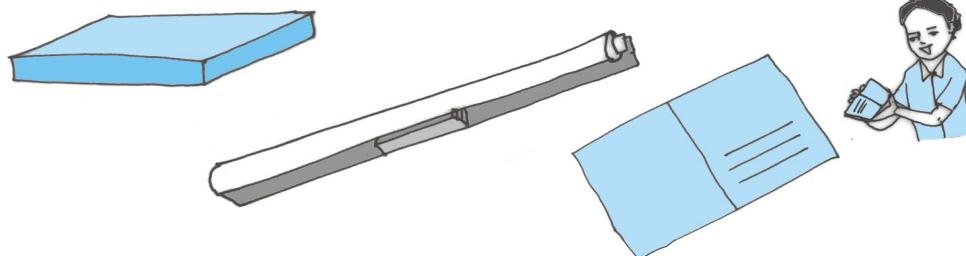
रेषाखंडाची काही उदाहरणे खालील प्रमाणे आहेत.:



एका पेटीची कड

एक ट्यूबलाईट

एका पोस्टकार्डची बाजू



आपल्या भोवतालची अशी आणखी काही रेषाखंडाची उदाहरणे देण्याचा प्रयत्न करा.

एका कागदावर A आणि B हे दोन बिंदू काढा. या दोन बिंदुंना शक्य त्या सर्व मार्गानी जोडण्याचा प्रयत्न करा. (आकृती 4.1).

A पासून B पर्यंत सर्वात लहान रस्ता कोणता?

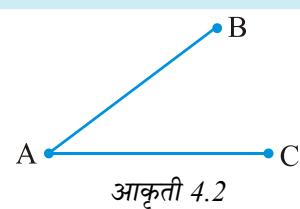
A आणि B ला जोडणारा सर्वात लहान रस्ता (यात बिंदू A आणि B आहेत) जो शेजारील आकृती 4.1

मध्ये दाखवला आहे, तो एक रेषाखंड आहे. तो \overline{AB} किंवा \overline{BA} ने दाखवतात. बिंदू A आणि B हे या रेषाखंडाचे अंत्यर्बिंदू आहेत.



प्रयत्न करा

- शेजारील आकृतीत दिलेल्या रेषाखंडांची नावे लिहा.
(आकृती 4.2) A हा प्रत्येक रेषाखंडांचा अंत्यर्बिंदू आहे का?



4.4 रेषा

कल्पना करा की A पासून B पर्यंतचा रेषाखंड (अर्थात \overline{AB}) ला A च्या पुढे एका दिशेने आणि B च्या पुढे दुसऱ्या दिशेने अमर्याद वाढविले. (आकृती पहा.) आपल्याला रेषेचे (line) एक उदाहरण मिळेल.

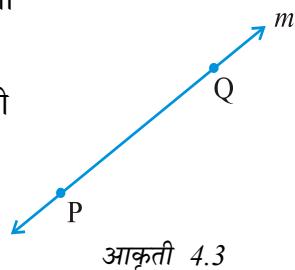
तुम्हाला असे वाटते की कागदावर तुम्ही पूर्ण रेषा काढू शकता? नाही. (का?)



दोन बिंदू A आणि B मधून जाणारी रेषा \overline{AB} दाखवते. ही दोन्ही दिशांना अमर्याद वाढत जाते. यावर असंख्य बिंदू असतात. (या बद्दल विचार करा.

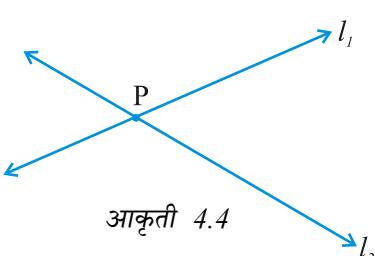
रेषा निश्चित करण्यासाठी दोन बिंदू पुरेसे असतात. आपण म्हणतो की, दोन बिंदू एक रेषा निश्चित (determine) करतात.

शेजारील आकृती (आकृती 4.3) रेषा \overline{PQ} ची आहे. कधी कधी एका रेषेला l सारख्या अक्षरानेही दाखवतात.

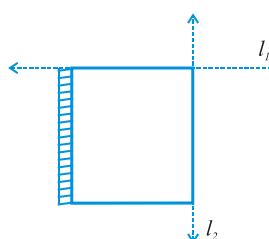


4.5 छेदणाऱ्या रेषा

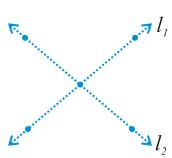
शेजारील आकृती 4.4 पहा. यात l_1 आणि l_2 या दोन रेषा दाखवल्या आहेत. या दोन रेषा बिंदू P मधून जातात. आपण म्हणतो की, रेषा l_1 आणि l_2 बिंदू P मध्ये छेदतात. जर दोन रेषात एक सामाईक बिंदू असेल तर त्यांना छेदणाऱ्या रेषा (intersecting lines) म्हणतात.



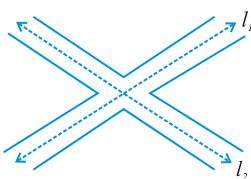
छेदणाऱ्या रेषांची काही उदाहरणे खाली दिली आहेत.:



आपल्या अभ्यास पुस्तिकेच्या दोन संलग्न कडा



इंग्रजी वर्णमालेतील X हे अक्षर



परस्परांना छेदणारे स्ते

आकृती 4.5

छेदणाऱ्या रेषांच्या जोड्यांची आणखी काही उदाहरणे शोधण्याचा प्रयत्न करा.



हे करा

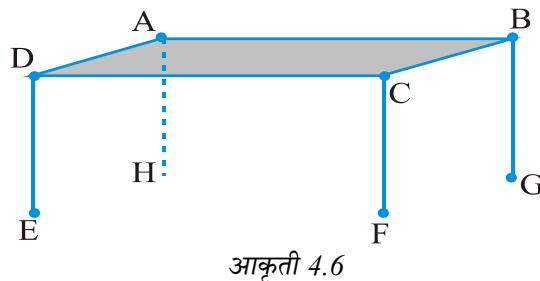


एक कागद घ्या. तो दोन वेळा असा टुमडा (घडीच्या खुणा ठेवा) की छेदणाऱ्या रेषा मिळतील आणि चर्चा करा.

- दोन रेषा एक पेक्षा अधिक बिंदू छेदतात का?
- दोन पेक्षा जास्त रेषा एकाच बिंदू छेदू शकतात का?

4.6 समांतर रेषा

आकृती 4.6 मध्ये दाखवलेले टेबल पहा. त्याचा वरचा भाग ABCD सपाट (Flat) आहे. तुम्हांला काही रेषाखंड आणि बिंदू दिसत आहेत का? इथे छेदणाऱ्या रेषा आहेत का?



हो, इथे \overline{AB} आणि \overline{BC} , बिंदू B मध्ये छेदतात. कोणत्या रेषा A मध्ये छेदतात. कोणत्या रेषा C मध्ये छेदतात आणि कोणत्या रेषा D मध्ये छेदतात?

रेषा AD आणि CD परस्परांना छेदतात का?

रेषा AD आणि BC परस्परांना छेदतात का?

आपण पाहिले की, टेबलाच्या वरच्या पृष्ठावरील काही रेषा परस्परांना छेदत नाहीत. (त्यांना कितीही वाढवल तरी). \overline{AD} आणि \overline{BC} अशा रेषांची एक जोडी आहे. टेबलाच्या वरील पृष्ठावरच्या अशा रेषांची अन्य जोडी (ज्या कोठेही मिळणार नाहीत) सांगू शकाल का?

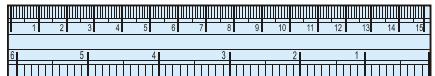
अशा रेषा (जशा टेबलाच्या वरच्या पृष्ठावर आहेत) ज्या छेदत नाहीत, त्यांना समांतर रेषा (parallel lines) म्हणतात.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा

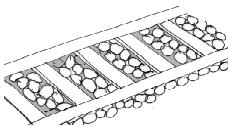
आपण समांतर रेषा आणखी कोठे पाहतो? त्यांची 10 उदाहरणे देण्याचा प्रयत्न करा.

जर दोन रेषा AB आणि CD समांतर असतील तर आपण सांकेतिक रूपात $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ लिहितो.

जर दोन रेषा l_1 आणि l_2 समांतर असतील तर आपण $l_1 \parallel l_2$ असे लिहितो खालील आकृतीतील समांतर रेषा तुम्ही सांगू शकाल का?



पट्टी (scale) च्या समोरासमोरील कडा



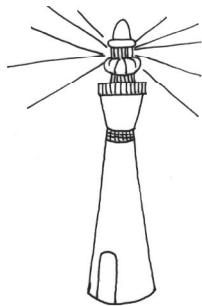
रेल्वे रूळ



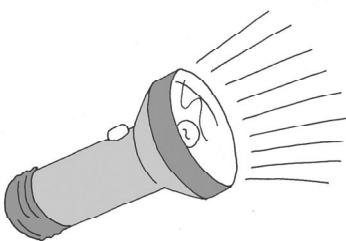
खिडकीच्या सळया

4.7 किरण

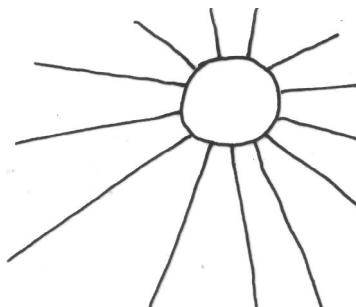
किरण (ray) साठी खालील काही प्रारूपे:



दीपस्तंभातून निघालेली
प्रकाशकिरणे



विजेरीतून निघालेली
प्रकाशकिरणे



सूर्याची किरणे

किरण रेषेचा एक भाग असतो. तो एका बिंदूपासून सुरु होतो. ज्याला आरंभ बिंदू (initial point) म्हणतात आणि एका दिशेने अमर्याद जातो.

इथे किरणाची दिलेली आकृती (आकृती 4.7) पहा. या किरणावर दोन बिंदू दाखवले आहेत:

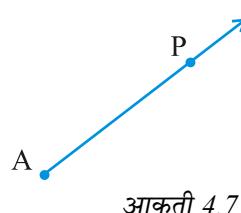
- (a) A, जो आरंभ बिंदू आहे.
- (b) P, जो किरणावरील अन्य बिंदू आहे.

आपण ज्याला \overrightarrow{AP} ने व्यक्त करतो.

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा:

जर \overrightarrow{PQ} एक किरण आहे तर,

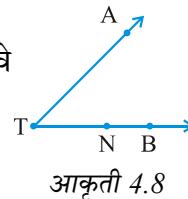
- (a) त्याचा आरंभबिंदू कोणता?
- (b) बिंदू Q किरणावर कोठे आहे?
- (c) Q या किरणाचा आरंभ बिंदू असे आपण म्हणू शकतो का?





प्रयत्न करा Q

- पुढे दिलेल्या आकृती (आकृती 4.8) मध्ये दाखवलेल्या किरणांची नावे लिहा.
- T या सर्व किरणांचा आंभ बिंदू आहे का?



शेजारील आकृती 4.9 मध्ये एक किरण OA दिला आहे. हा O ने सुरु होतो आणि A मधून जातो तसेच बिंदू B मधूनही जातो.

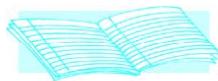
आपण त्याला \overline{OB} म्हणू शकतो का? का?

इथे \overline{OA} आणि \overline{OB} एकच किरण दाखवतात.

आपण किरण \overline{OA} ला किरण \overline{AO} लिहू शकतो का? का? किंवा का नाही?

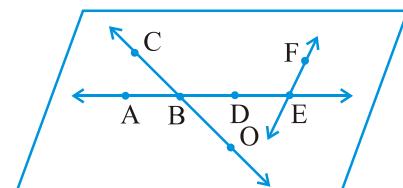
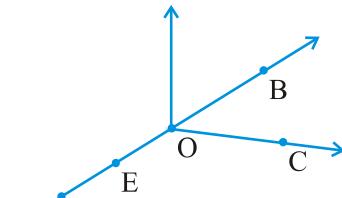
पाच किरण काढा. त्यांना योग्य नावे द्या.

या किरणावर काढलेले बाण काय दाखवतात.



उदाहरणसंग्रह 4.1

- शेजारील आकृतीचा वापर करून नावे लिहा:
 - पाच बिंदू
 - एक रेषा
 - चार किरण
 - पाच रेषाखंड
- शेजारील आकृतीत दिलेल्या रेषेची शक्य ती सर्व नावे लिहा. तुम्ही या चार बिंदूतील कोणतेही बिंदू वापरू शकता.
- शेजारील आकृती पाहून नावे लिहा.
 - ज्यांच्यात E बिंदू आहे अशा रेषा
 - A मधून जाणाऱ्या रेषा
 - ज्यावर बिंदू A आहे अशी रेषा
 - छेदणाऱ्या रेषांच्या दोन जोड्या
- यातून किती रेषा काढल्या जाऊ शकतात?
 - एक बिंदू
 - दोन बिंदू

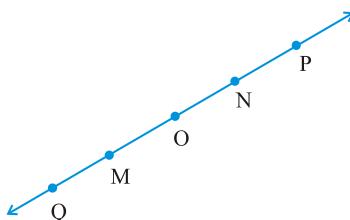


5. खालील स्थितीतील प्रत्येकासाठी एक-एक (Rough) आकृती काढा. आणि योग्य ती नावे द्या.

- (a) बिंदू P रेषाखंड \overline{AB} वर आहे.
- (b) रेषा XY आणि PQ बिंदू M वर छेदतात.
- (c) रेषा l वर E आणि F आहे पण D नाही.
- (d) \overline{OP} आणि \overline{OQ} बिंदू O वर मिळतात.

6. शेजारील रेषा \overline{MN} ची आकृती पहा. या आकृती संदर्भात खालील विधाने सत्य की असत्य ते सांगा.:

- (a) Q, M, O, N आणि P हे रेषा \overline{MN} वर आहेत.
- (b) M, O आणि N रेषाखंड \overline{MN} वर आहेत.
- (c) M आणि N रेषाखंड \overline{MN} चे अंत्यबिंदू आहेत.
- (d) O आणि N रेषाखंड \overline{OP} चे अंत्यबिंदू आहेत.
- (e) M रेषाखंड \overline{QO} दोन अंत्यबिंदूमधील एक आहे.
- (f) M किरण \overline{OP} कीरील एक बिंदू आहे.
- (g) किरण \overline{OP} किरण \overline{OP} हून भिन्न आहे.
- (h) किरण \overline{OP} आणि किरण \overline{OM} हे एकच आहेत.
- (i) किरण \overline{OM} किरण \overline{OP} च्या विरुद्ध (Opposite) किरण नाही.
- (j) O किरण \overline{OP} चा आंभ बिंदू नाही.
- (k) N किरण \overline{NP} आणि किरण \overline{NM} चा प्रारंभिक बिंदू आहे.



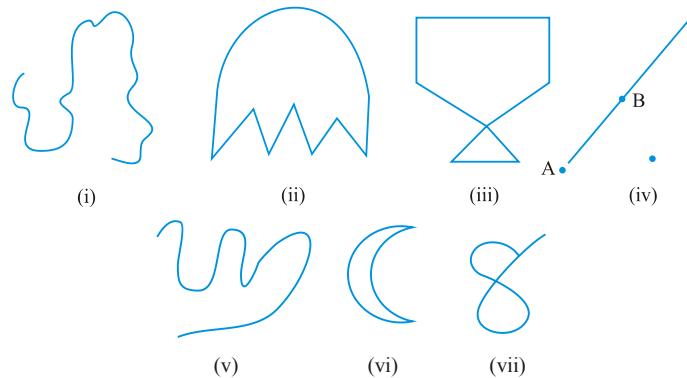
4.8 वक्र

तुम्ही कधी कागदावर वेड्या-वाकड्या रेषा काढल्या आहेत का? असे केल्यावर ज्या आकृत्या मिळतात. त्यांना वक्र (curves) असे म्हणतात.

यातील काही आकृत्या तुम्ही कागदावर पेन्सिल न उचलता आणि पट्टीचा वापर न करता काढू शकता. या सर्व आकृत्या वक्र आहेत. आकृती (4.10)

रोजच्या भाषेत 'वक्र' चा अर्थ 'सरळ नाही' असा होतो. गणितात वक्र, सरळ सुदृढा असू शकतो जसे खाली दाखवले आहे. [(आकृती 4.10 (iv))]

लक्षात घ्या. आकृती 4.10 मध्ये वक्र (iii) आणि (vii) स्वतःलाच छेदतात, तर (i), (ii), (v) आणि (vi) मध्ये वक्र स्वतःला छेदत नाही. जर कोणताही वक्र स्वतःला छेदत नसेल तर त्याला साधा वक्र (Simple Curves) म्हणतात.

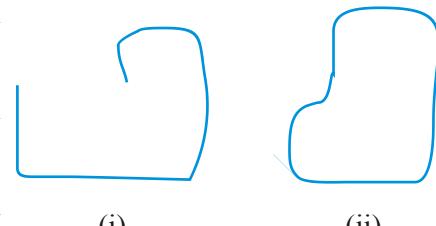


आकृती 4.10

पाच साधे वक्र काढा आणि पाच साधे नसलेले वक्र काढा.

आता हे पहा. (आकृती 4.11)

शेजारील आकृती (आकृती 4.11) मध्ये दिलेल्या दोन वक्रांमध्ये काय फरक आहे. पहिली अर्थात् आकृती 4.11 (i) हा खुला वक्र (Open Curve) आणि दुसरी आकृती 4.11 (ii) हा एक बंद वक्र (Closed Curve) आहे. आकृती 4.10 (i), (ii), (v) आणि (vi) मधील बंद वक्र आणि खुले वक्र तुम्ही सांगू शकाल का?



आकृती 4.11

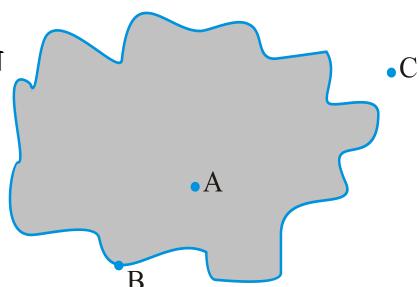
एका आकृतीमधील स्थिती

एका टेनिस कोर्ट (Tennis Court) मध्ये कोर्ट रेषा त्याला तीन भागात विभागते. हे भाग आहेत: रेषेच्या एका बाजूला, रेषेवर आणि रेषेच्या दुसऱ्या बाजूला. तुम्ही रेषेच्या एका बाजूकडून दुसऱ्या बाजूला रेषा ओलांडल्याशिवाय जाऊ शकत नाही.

तुमच्या घराचे कुंपण घराला रस्त्यापासून वेगळे करते. तुम्ही कुंपणाच्या आत, कुंपणाच्या सीमेवर (Boundary) आणि कुंपणाबाहेर असे म्हणता.

याप्रमाणे एका बंद वक्राशी संबंधित तीन भाग असतात. जे एकमेकापासून पूर्णपणे भिन्न असतात.

- वक्राचा अंतर्भाग (interior) (आतील भाग)
- वक्राची सीमा (boundary) (वक्रावर)
- वक्राचा बहिर्भाग (exterior) (बाहेरचा भाग)



आकृती 4.12

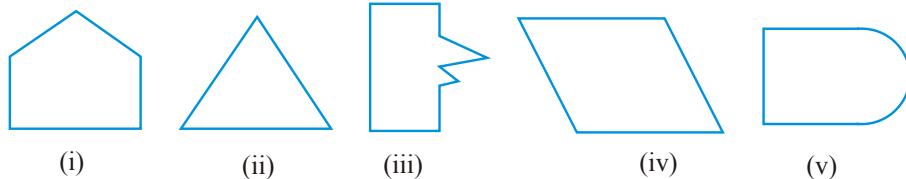
आकृती 4.12 मध्ये, A वक्राच्या अंतर्भागात आहे. C त्याच्या बहिर्भागात आहे आणि B वक्राच्या सीमेवर आहे.

वक्राचा अंतर्भुग आणि त्याची सीमा यांना मिळून त्या वक्राचे क्षेत्र (region) असे म्हणतात. तुम्ही जो बंद वक्र काढला आहे, त्यात तीन क्षेत्र दाखवली आहेत.

4.9 बहुभुज

खाली दाखवलेल्या आकृती 4.13 (i), (ii), (iii), (iv) आणि (v) पहा.:

तुम्ही यांच्याबाबत काय म्हणू शकाल? या बंद आकृत्या (वक्र) आहेत का? या एकमेकींपासून कोणत्या बाबतीत वेगळ्या आहेत? आकृती 4.13 (i), (ii), (iii) आणि (iv) यामध्ये काही



आकृती 4.13

विशेषता आहे. या केवळ रेषाखंडाने बनल्या आहेत. या आकृत्यांना बहुभुज (polygons) म्हणतात.

म्हणून, जेव्हा एखादी आकृती, सरळ बंद आकृती असेल आणि केवळ रेषाखंडांनी बनलेली असेल, तर ती बहुभुज असते. दहा वेगवेगळ्या आकृतींचे बहुभुज काढा.

खालील गोष्टींच्या साहाय्याने बहुभुज बनविण्याचा प्रयत्न करा.

हे करा



2. चार आगकाड्या
 3. तीन आगकाड्या
 4. दोन आगकाड्या
- वरीलपैकी कशामध्ये शक्य नाही? का?

बाजू, शिरोबिंदू आणि कर्ण

शेजारील आकृती 4.14 पहा. याला बहुभुज म्हणण्याचे कारण सांगा. बहुभुज तयार करणाऱ्या रेषाखंडांना त्याच्या भुजा (sides) म्हणतात.

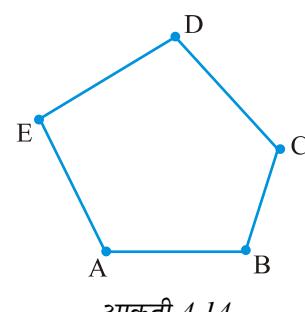
बहुभुज ABCDE च्या भुजांची नावे लिहा.

(लक्षात घ्या. की कोनांना (corners) कोणत्या प्रकारे घेऊन बहुभुजाचे नाव लिहिले आहे)

याच्या भुजा \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} आणि \overline{EA} आहेत.

दोन भुजा जेथे मिळतात त्या बिंदूला बहुभुजाचा शिरोबिंदू (vertex) म्हणतात.

भुजा \overline{AE} आणि \overline{ED} बिंदू E वर मिळतात. म्हणून E बहुभुज ABCDE चा एक शिरोबिंदू आहे. B आणि C हे त्याचे आणखी



आकृती 4.14



दोन शिरोबिंदू आहेत. तुम्ही या बिंदूवर मिळणाऱ्या भुजांची नावे लिहू शकता का?

वरील बहुभुज ABCDE च्या अन्य शिरोबिंदूंची नावे तुम्ही लिहू शकता का?

ज्यांच्यामध्ये एक सामाईक अंत्यबिंदू (common end point) असेल अशा कोणत्याही दोन भुजांना बहुभुजाच्या लगतच्या बाजू (adjacent sides) असे म्हणतात.

AB आणि BC लगतच्या भुजा आहेत का? AE आणि DC बाबत तुम्ही काय म्हणू शकता!

एकाच भुजेच्या अंत्यबिंदूंना लगतचे शिरोबिंदू (adjacent vertices) म्हणतात. शिरोबिंदू E आणि D लगतचे शिरोबिंदू आहेत. तर A आणि D लगतचे शिरोबिंदू नाहीत. असे का? हे तुम्ही सांगू शकाल का?

लगतचे नाहीत असे शिरोबिंदू घ्या. त्यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडांना बहुभुजाचे कर्ण (diagonals) असे म्हणतात.

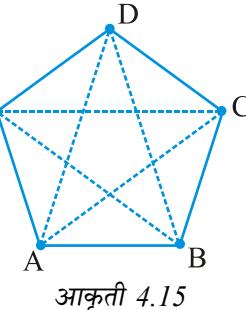
शेजारील आकृतीत रेषाखंड \overline{AC} , \overline{AD} , \overline{BD} , \overline{BE} आणि \overline{CE} बहुभुजाचे कर्ण आहेत.

रेषाखंड \overline{BC} कर्ण आहे? किंवा का नाही?

लगतच्या शिरोबिंदूंना जोडून कर्ण मिळू शकतो का?

आकृती ABCDE (आकृती 4.15) च्या सर्व भुजा, लगतच्या भुजा आणि लगतचे शिरोबिंदू यांची नावे लिहा.

एक बहुभुज ABCDEFGH काढा. त्याच्या सर्व बाजू लगतच्या बाजू आणि कर्णांची नावे लिहा.



उदाहरणसंग्रह 4.2

1. खाली दिलेल्या वक्रांचे (i) खुले किंवा (ii) बंद या स्वरूपात वर्गीकरण करा.:



2. खालील गोष्टी स्पष्ट करण्यासाठी एक आकृती काढा.:

- (a) खुला वक्र (b) बंद वक्र



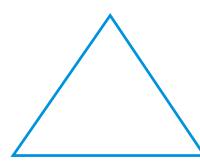
(a)



(b)



(c)



(d)



(e)

3. कोणताही बहुभुज काढा आणि त्याचा अंतर्भुग छायांकित (shade) करा.

4. शेजारील आकृती पाहून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(a) हा एक वक्र आहे का?

(b) हा बंद आहे का?

5. शक्य असेल तर रफ आकृत्या काढून खालील गोष्टी स्पष्ट करा.

(a) एक बंद वक्र जो बहुभुज नाही.

(b) केवळ रेषाखंडाने बनलेला खुला वक्र

(c) दोन भुजा असलेला बहुभुज



4.10 कोन

जेव्हा कोपरे (corner) बनतात, तेव्हा कोनही (angles) बनतात.

इथे आकृती 4.16 दिली आहे. त्यात पेटींचा (Box) वरचा भाग बिजागीरीने लावलेल्या एका दरवाज्यासारखा आहे. पेटीची कड

(edge) AD आणि दरवाज्याची कड AP

यांची कल्पना दोन किरण \overline{AD} आणि

\overline{AP} यामध्ये केली जाऊ शकते. या

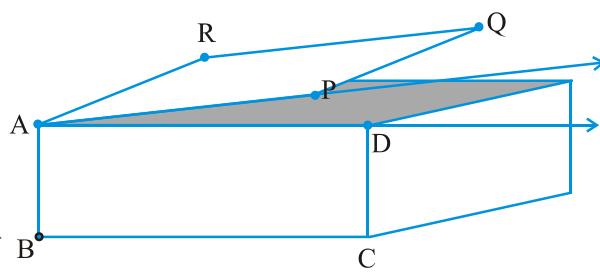
दोन्ही मध्ये एक सामाईक अंत्यबिंदू

(किंवा आरंभ बिंदू) A आहे, हे दोन

किरण कोन तयार करतात असे म्हणता

येईल.

आकृति 4.16



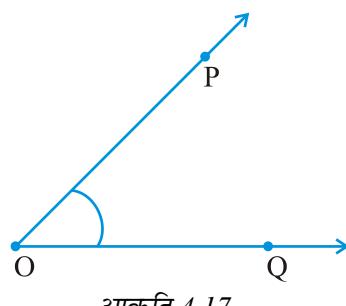
सामाईक आरंभबिंदू असलेल्या दोन किरणांनी एक कोन बनतो.

कोन करणाऱ्या दोन किरणांना त्याच्या भुजा (Arms किंवा sides) म्हणतात. सामाईक आरंभबिंदूला कोनाचा शिरोबिंदू किंवा शीर्ष (vertex) म्हणतात.

शेजारील आकृतीत, किरण \overline{OP} आणि किरण \overline{OQ} यांनी बनलेला एक कोन दाखवला आहे. कोन दाखविण्यासाठी शिरोबिंदू जवळ लहान वक्र वापरला आहे. O हा या कोनाचा शिरोबिंदू आहे. या कोनाच्या भुजा कोणत्या आहेत? त्या किरण \overline{OP} आणि \overline{OQ} नाहीत का?

या कोनाला आपण कशा प्रकारे नाव देऊ शकतो? आपण केवळ असे म्हणू शकतो की, O वर एक कोन आहे आणि आणखी नेमकेपणासाठी, आपण कोनाच्या दोन्ही भुजांवर एक-एक बिंदू घेऊन आणि त्याचा शिरोबिंदू घेऊन कोनाचे नाव लिहू शकतो.

या पद्धतीने, या कोनाला कोन POQ हे नाव देणे ही चांगली पद्धत आहे. आपण तो • POQ ने दाखवतो.



आकृति 4.17



विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा.

शेजारील आकृती 4.18 पहा. या कोनाचे नाव काय आहे? आपण त्याला • P म्हणू शकतो का? परंतु कोणत्या कोनाला • P म्हणू शकतो? • P ने कोणता अर्थबोध होतो?

कोनाला, केवळ त्याच्या शिरोबिंदूने नामांकित करणे सहायक होईल का? का नाही?

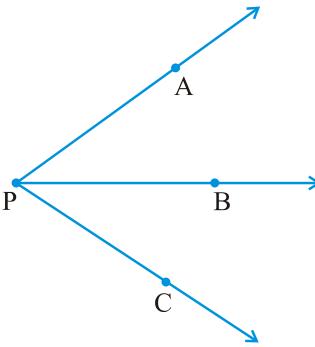
• P चा अर्थ इथे • APB किंवा • CPB किंवा • APC होऊ शकतो. म्हणून इथे आणखी माहितीची आवश्यकता आहे.

लक्षात ठेवा, की कोन लिहिताना त्याच्या शिरोबिंदूचे अक्षर नेहमी मधोमध लिहावे.

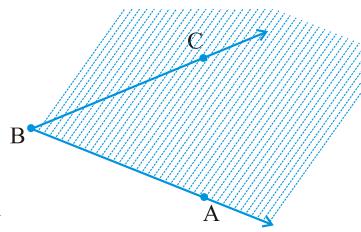
हे करा

आकृती 4.18

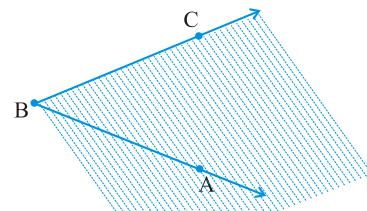
कोणाताही • ABC घ्या.



\overline{BA} सीमा घेऊन कागदाचा तो भाग छायांकित करा. ज्या बाजूला \overline{BC} आहे.



आता \overline{BC} सीमा घेऊन त्या भागाला दुसऱ्या रंगाने रंगवा ज्या बाजूला \overline{BA} आहे.

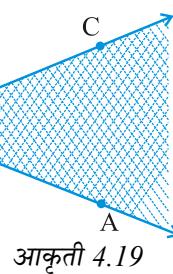


दोन्ही छायांकित भागातील सामाईक भाग • ABC चा अंतर्भाग आहे. (आकृती 4.19)।

(लक्षात घ्या की, अंतर्भाग एक सीमित क्षेत्र नाही हे अमर्याद आहे, कारण कोनाच्या दोन्ही भुजा आपल्या एका बाजूला अमर्याद विस्तृत आहेत)

शेजारील आकृती 4.20 मध्ये, बिंदू X कोनाच्या अंतर्भागात आहे.

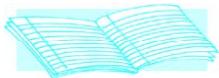
Z कोनाच्या अंतर्भागात नाही. हा कोनाच्या बहिर्भागात आहे.



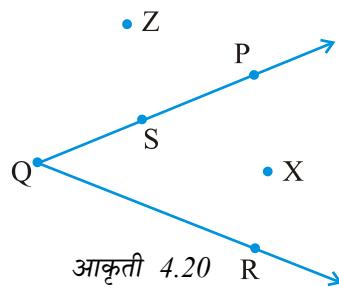
आकृती 4.19

बिंदू S, • PQR वर आहे, म्हणून कोनाशी ही संबंधित तीन क्षेत्रे असतात.

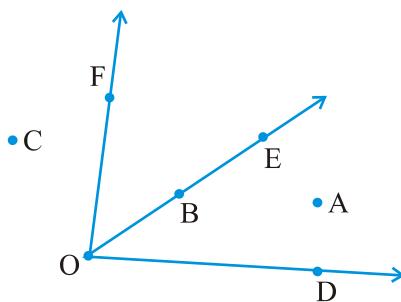
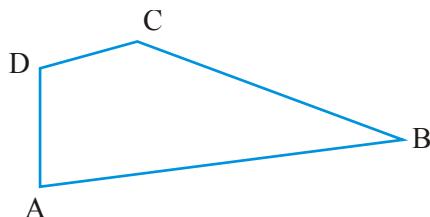
उदाहरणसंग्रह 4.3



- खाली दिलेल्या आकृतीत कोनांची नावे लिहा.



- शेजारील आकृतीमध्ये, असे बिंदू लिहा.
 - जे • DOE च्या अंतर्भुगात आहेत.
 - जे • EOF च्या बहिर्भुगात आहेत.
 - EOF वर आहेत.
- दोन कोनांची अशी आकृती काढा. ज्यात,
 - एक बिंदू सामाईक आहे.
 - दोन बिंदू सामाईक आहेत.
 - तीन बिंदू सामाईक आहेत.
 - चार बिंदू सामाईक आहेत.
 - एक किरण सामाईक आहे.

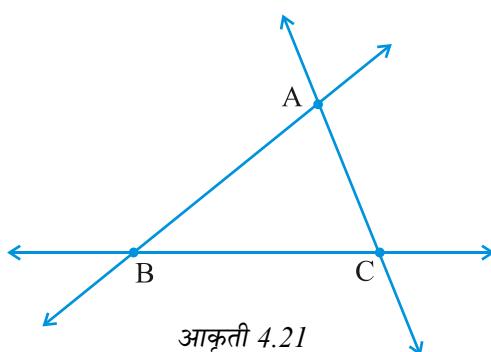


4.11 त्रिकोण

त्रिकोण (triangle) तीन भुजा असलेला बहुभुज आहे. खरं तर, हा सर्वात कमी बाजू असलेला बहुभुज आहे.

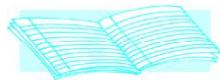
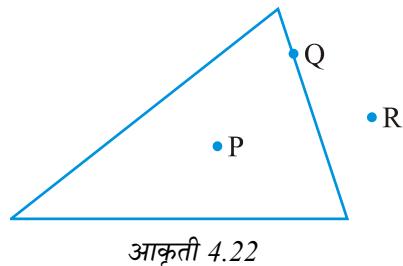
शेजारील आकृती 4.21 मध्ये दिलेला त्रिकोण पहा. आपण त्रिकोण ABC साठी • ABC असे लिहितो. • ABC मध्ये किती भुजा आहेत? यात किती कोन आहेत?

या त्रिकोणाच्या \overline{AB} , \overline{BC} आणि \overline{CA} या तीन भुजा आहेत. त्याचे तीन कोन • BAC, • BCA आणि • ABC, बिंदू A, B आणि C ला त्रिकोणाचे शिरोबिंदू म्हणतात.



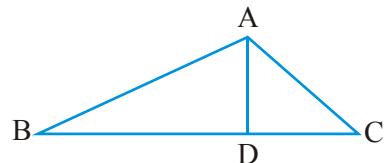


बहुभुज असल्यामुळे, त्रिकोणाला बहिर्भाग आणि अंतर्भाग असतो. शेजारील आकृती 4.22 मध्ये, P त्रिकोणाच्या अंतर्भागात आहे, R त्रिकोणाच्या बहिर्भागात आहे आणि Q त्रिकोणावर आहे.



उदाहरणसंग्रह 4.4

- त्रिकोण ABC ची कच्ची आकृती काढा. या त्रिकोणाच्या अंतर्भागात बिंदू P आणि बहिर्भागात बिंदू Q दाखवा. बिंदू A त्याच्या अंतर्भागात आहे की बहिर्भागात आहे.
- (a) शेजारील आकृतीतील तीन त्रिकोण ओळखा.
(b) सात कोनांची नावे लिहा. (c) सहा रेषाखंडांची नावे लिहा. (d) कोणत्या दोन त्रिकोणात \bullet B सामाईक आहे?



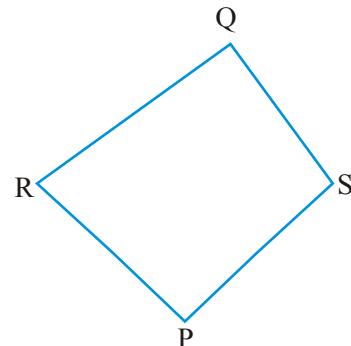
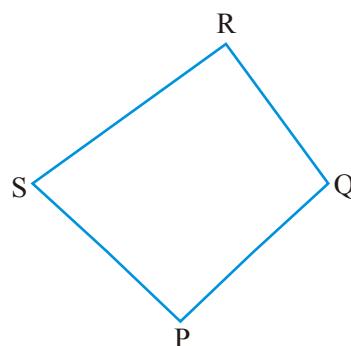
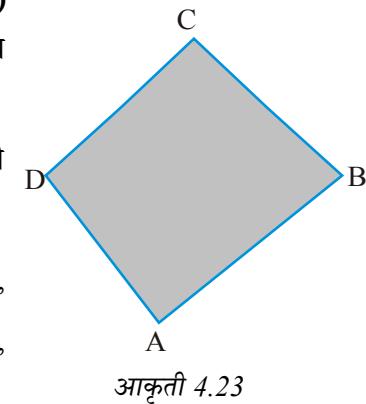
4.12 चौकोन

चार भुजा असलेल्या बहुभुजाला **चौकोन** (Quadrilateral)

म्हणतात. याला चार भुजा आणि चार कोन असतात. त्रिकोणप्रमाणेच आपण याचा अंतर्भाग बघू शकतो.

ज्या क्रमाने चौकोनाच्या शिरोबिंदूची नावे लिहिली जातात ती पद्धती बघा.

चौकोन ABCD (आकृती 4.23) च्या चार भुजा \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} आणि \overline{DA} आहेत. याचे चार कोन आहेत: $\bullet A$, $\bullet B$, $\bullet C$ आणि $\bullet D$.



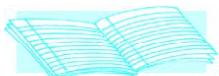
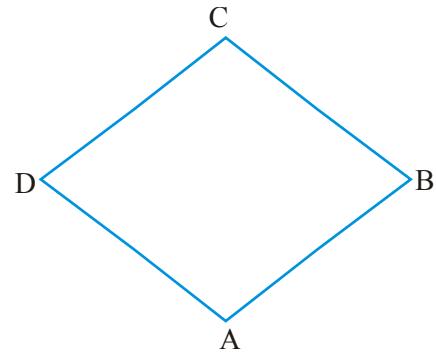
चौकोन PQRS आहे.

हा चौकोन PQRS आहे का?

चौकोन ABCD मध्ये \overline{AB} आणि \overline{BC} लगतच्या भुजा आहेत. लगतच्या भुजांच्या आणखी जोड्या लिहू शकाल का?

या चौकोनात \overline{AB} आणि \overline{DC} संमुख भुजा (Opposite sides) आहेत. संमुख भुजेची आणखी एक जोडी लिहा.

- A आणि • C चौकोन ABCD चे संमुख कोन (Opposite angles) आहेत. याप्रमाणे, • D आणि
- B सुदृढा संमुख कोन आहेत. • A आणि • B लगतचे कोन (adjacent angles) आहेत. याप्रमाणे लगतच्या कोनांच्या अन्य जोड्या लिहू शकाल.



उदाहरणसंग्रह 4.5

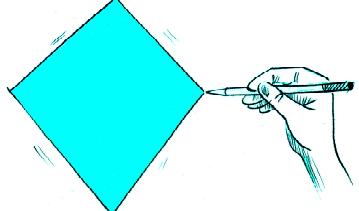
- चौकोन PQRS ची कच्ची आकृती काढा. त्याचे कर्ण काढा. त्यांची नावे लिहा. या कर्णाचा छेदन बिंदू चौकोनाच्या अंतर्भागात आहे का? किंवा बहिर्भागात आहे का?

- चौकोन KLMN चे एक कच्चे चित्र काढा आणि लिहा.

- (a) संमुख भुजांच्या दोन जोड्या
- (b) संमुख कोनांच्या दोन जोड्या
- (c) लगतच्या भुजांच्या दोन जोड्या
- (d) लगतच्या कोनांच्या दोन जोड्या

- शोधा.

पट्ट्या आणि त्यांना बांधायच्या वस्तू घेऊन एक त्रिकोण आणि चौकोन बनवा. त्रिकोणाच्या एका शिरोबिंदूवर पट्ट्या आत दाबण्याचा प्रयत्न करा. हीच कृती चौकोनाच्या बाबतीतही करा. त्रिकोणात काही बदल घडून आला? चौकोनात काही बदल घडून आला? त्रिकोण ही एक दृढ (rigid) आकृती आहे का? विद्युत टॉवर (Electric Towers) सारख्या रचनांमध्ये त्रिकोण आकारांचा वापर का करतात? चौकोन आकारांचा का नाही?



4.13 वर्तुळ

तुम्हाला तुमच्या परिसरात अनेक वर्तुळाकार वस्तू मिळतील. जशा की, एक चक्र, बांगडी, नाणे, इत्यादी. आपण वर्तुळाकार वस्तूंचा अनेक प्रकारे वापर करतो. एका स्टीलच्या अवजड कांबेला ओढण्यापेक्षा लोटत नेणे अधिक सोपे असते.

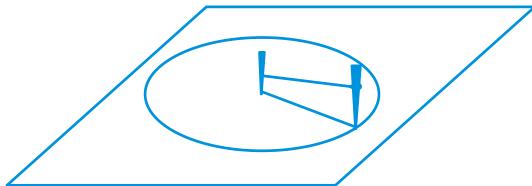
वर्तुळ (circle) एक साधा बंद वक्र आहे, की जो बहुभुज नाही. याचे काही विशिष्ट गुणधर्म आहेत.



हे करा



- एक बांगडी किंवा कोणतीही वर्तुळाकार वस्तू कागदावर ठेवा आणि त्याच्या चारी बाजूनी पेन्सिल फिरवून एक वर्तुळाकार आकृती काढा.
- जर आपल्याला एक वर्तुळाकार बाग करायची असेल तर ती तुम्ही कशी कराल?



दोन काठ्या आणि दोरी घ्या. जमिनीवर एक काठी खोचा. हे काढल्या जाणाऱ्या वर्तुळाचे केंद्र (centre) आहे. दोरीच्या दोन्ही बाजूला दोन फास (loop) करा. एक फास केंद्राच्या काठीला लावा आणि दुसरा फास दुसऱ्या काठीला लावा. या काठ्या जमिनीला लंबरूप ठेवा. दोरी ताणलेली ठेवत, जमिनीवर दुसरी काठी फिरवत एक पथ काढा. तुम्हाल वर्तुळ (circle) मिळेल.

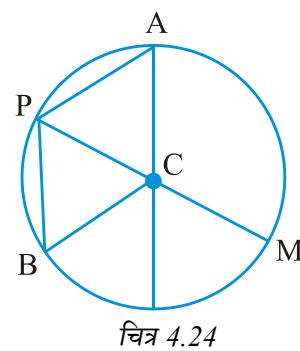
स्वाभाविक आहे, की वर्तुळावरील प्रत्येक बिंदू केंद्रापासून समान अंतरावर आहे.

वर्तुळाचे भाग

शेजारील आकृती 4.24 मध्ये केंद्र C असलेले एक वर्तुळ आहे.

A,P,B,M वर्तुळावरील काही बिंदू आहेत. आपल्याला दिसेल की, $CA = CB = CP = CM$ आहे.

प्रत्येक रेषाखंड \overline{CA} , \overline{CB} , \overline{CP} किंवा \overline{CM} वर्तुळाच्या त्रिज्या (radius) आहेत. त्रिज्या हा असा रेषाखंड आहे, की जो वर्तुळावरील बिंदुला त्याच्या केंद्राशी जोडतो. याच आकृतीत \overline{CP} आणि \overline{CM} अशा त्रिज्या आहेत की बिंदू P, C, M एकाच रेषेवर आहेत. रेषाखंड \overline{PM} ला वर्तुळाचा व्यास (diameter) म्हणतात. वर्तुळाचा व्यास त्याच्या त्रिजेच्या दुप्पट आहे का? हो, वर्तुळावरील कोणत्याही दोन बिंदुंना जोडणाऱ्या रेषाखंडाला वर्तुळाची जीवा (chord) म्हणतात.

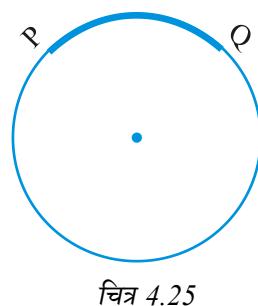


याप्रमाणे \overline{PB} वर्तुळाची जीवा आहे. \overline{PM} सुदूर वर्तुळाची जीवा आहे का?

वर्तुळाच्या भागाला त्याचा कंस (arc) म्हणतात.

जर बिंदू P आणि Q वर्तुळावर असतील तर आपल्याला कंस PQ मिळेल. तो आपण \widehat{PQ} ने दाखवतो. (आकृती 4.25)

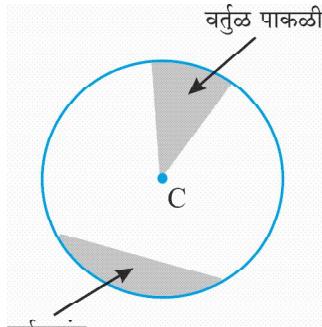
कोणत्याही सरळ बंद वक्राप्रमाणे, वर्तुळाचा अंतर्भाग आणि



बहिर्भाग याबाबत आपण विचार करू शकतो. वर्तुळ क्षेत्राचा तो भाग जो दोन त्रिज्या आणि संगत कंस यांनी बनतो. त्याला वर्तुळ पाकळी (sector) म्हणतात.

वर्तुळाची एक जीवा आणि संगत कंस यांनी बनलेल्या वर्तुळ क्षेत्राच्या भागाला वर्तुळखंड (segment of a circle) म्हणतात.

कोणतीही वर्तुळाकार वस्तू घ्या. एक दोरा घ्या, तो वस्तूभोवती एक वेळा गुंडाळा आणि त्याची लांबी मोजा. दोन्याची ही लांबी त्या वस्तूभोवती एक पूर्ण चक्कर मारताना काटलेले अंतर होय. ही लांबी काय दाखवते?

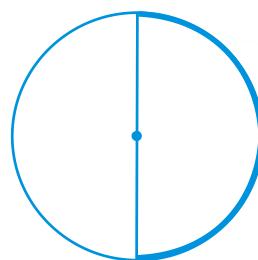


चित्र 4.26

हे करा अंतर म्हणजेच परीघ (circumference) होय.

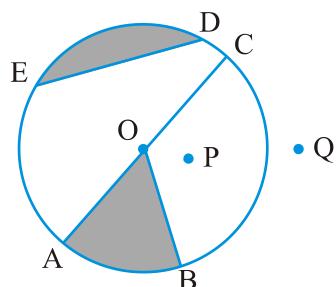
- एक वर्तुळाकार कागद (sheet) घ्या. त्याची घडी घालून दोन अर्धे भाग (halves) बनवा. दाबून घडीची खून मिळवा आणि कागद उघडा. तुम्हाला दिसतंय का की वर्तुळाचे क्षेत्र त्याच्या व्यासामुळे दोन अर्ध्या (बरोबर) भागात विभागले गेले आहे. वर्तुळाचा एक व्यास त्याला बरोबर दोन भागांत विभागतो. प्रत्येक भागाला अर्धवर्तुळ (semicircle) म्हणतात.

अर्धवर्तुळ वर्तुळाचा अर्धा भाग असतो, ज्यामध्ये अंत्यर्बिंदू सोडून व्यास समाविष्ट नसतो.



उदाहरणसंग्रह 4.6

- शेजारील आकृती पाहून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.
 - वर्तुळाचे केंद्र
 - तीन त्रिज्या
 - एक व्यास
 - एक जीवा
 - अंतर्भागातील दोन बिंदू
 - बहिर्भागातील दोन बिंदू
 - एक वर्तुळ पाकळी
 - एक वर्तुळखंड





2. (a) वर्तुळाचा प्रत्येक व्यास त्याची जीवा सुदृढा असते का?
(b) वर्तुळाची प्रत्येक जीवा त्याचा व्यास सुदृढा असतो का?
3. एक वर्तुळ काढून त्यात खालील गोष्टी दाखवा.:

(a) केंद्र	(e) एक वर्तुळखंड
(b) एक त्रिज्या	(f) त्याच्या अंतर्भागातील एक बिंदू
(c) एक व्यास	(g) त्याच्या बहिर्भागातील एक बिंदू
(d) एक वर्तुळपाकळी	(h) एक कंस
4. सत्य की असत्य हे सांगा.
 - (a) वर्तुळाचे दोन व्यास नक्कीच एकमेकांना छेदतात.
 - (b) वर्तुळाचे केंद्र हे नेहमी त्याच्या अंतर्भागात असते.

आपण काय शिकलो?

1. बिंदू एक स्थिती ठरवतो. त्याला सामान्यपणे इंग्रजी मोठ्या अक्षरात व्यक्त करतात.
2. दोन बिंदूंना जोडणारा सर्वांत लहान रस्ता एक रेषाखंड दाखवतो. बिंदू A आणि B ला जोडणारा रेषाखंड \overline{AB} दाखवतात. (\overline{AB} और \overline{BA} दोनों एक ही रेखाखंड को दर्शाते हैं। या वाक्याचे भाषांतर नाही.)
3. रेषाखंड \overline{AB} ला दोन्ही बाजूस अमर्याद वाढवला असता आपल्याला एक रेषा मिळते. ती \overline{AB} ने दाखवतात. ती / सारख्या अक्षरानेही दाखवली जाते.
4. दोन भिन्न रेषा परस्परांना कोणत्या तरी एका बिंदूत छेदतात किंवा मिळतात. तेव्हा त्यांना छेदणाऱ्या रेषा म्हणतात.
5. दोन रेषा एकमेकांना छेदत नसतील तर त्यांना समांतर रेषा म्हणतात.
6. किरण हा रेषेचा असा भाग आहे की, जो एका बिंदूपासून सुरु होऊन एका दिशेने अमर्याद वाढतो.
7. कागदावर पेन्सिल न उचलता कोणतीही आकृती (साधी किंवा वक्र) काढली तर त्याला वक्र असे म्हणतात. या संदर्भात एक रेषा ही सुदृढा एक वक्रच आहे.
8. जर कोणताही वक्र स्वतःला छेद नसेल तर त्याला सरळ वक्र (Simple Curve) म्हणतात.
9. जर वक्राची टोके जुळली असतील त्याला बंद वक्र म्हणतात. अन्यथा त्याला खुला वक्र म्हणतात.
10. रेषाखंडांनी बनलेल्या बंद आकृतीला बहुभुज म्हणतात.
 - (i) बहुभुज बनविणाऱ्या रेषाखंडांना त्याच्या भुजा म्हणतात.
 - (ii) कोणत्याही दोन भुजा ज्यामध्ये एक सामाईक अंत्य बिंदू असतो. त्यांना बहुभुजाच्या लगतच्या

बाजू म्हणतात.

- (iii) दोन बाजू जिथे मिळतात त्या बिंदूला बहुभुजाचा शिरोबिंदू (vertex) म्हणतात.
 - (iv) बहुभुजाच्या एकाच बाजूच्या अंत्य बिंदूना लगतचे शिरोबिंदू (adjacent vertex) म्हणतात.
 - (v) लगत नसलेल्या शिरोबिंदूना जोडून तयार होणाऱ्या रेषाखंडाला त्या बहुभुजाचा कर्ण म्हणतात.
11. सामाईक आरंभबिंदू असलेल्या दोन किरणांमुळे एक कोन तयार होतो. दोन किरण \overrightarrow{OA} आणि \overrightarrow{OB}
- AOB बनतात. (• BOA असेही लिहू शकतो.)
- कोनाशी संबंधित तीन क्षेत्र आहेत :
- तो कोन, कोनाचा अंतर्भाग आणि कोनाचा बहिर्भाग.
12. त्रिकोण (Triangle), तीन बाजूंनी तयार झालेला बहुभुज असतो.
13. चार बाजू असलेल्या बहुभुजाला चौकोन म्हणतात. त्याच्या शिरोबिंदूना क्रमाने नावे दिली जातात. (named cyclically).
- ABCD या कोणत्याही चौकोनात, \overline{AB} आणि \overline{DC} तसेच \overline{AD} आणि \overline{BC} या संमुख बाजूंच्या जोड्या आहेत. • A आणि • C तसेच • B आणि • D या संमुख कोनांच्या जोड्या आहेत. • A आणि • B लगतचे कोन आहेत. अशाच लगतच्या कोनांच्या आणखी तीन जोड्या आहेत.
14. एका निश्चित बिंदूपासून समान अंतरावर असणाऱ्या बिंदूंच्या बिंदूपथाला वर्तुळ असे म्हणतात. निश्चित बिंदूला वर्तुळाचे केंद्र म्हणतात तर निश्चित अंतराला वर्तुळाची त्रिज्या म्हणतात, तसेच वर्तुळाच्या अंतराला परीघ असे म्हणतात. वर्तुळावरील कोणत्याही दोन बिंदूना जोडणाऱ्या रेषाखंडास जीवा (chord) असे म्हणतात.
- केंद्रामधून जाणाऱ्या जीवेला व्यास असे म्हणतात. दोन त्रिज्या आणि संगत कंस यांनी बनलेल्या वर्तुळ क्षेत्राच्या भागाला वर्तुळ पाकळी (sector) असे म्हणतात. वर्तुळाची एक जीवा आणि संगत कंस यांनी बनलेल्या वर्तुळ क्षेत्राच्या भागाला वर्तुळ खंड (segment of a circle) म्हणतात. वर्तुळाच्या व्यासाचे दोन अंत्यबिंदू वर्तुळाला दोन समान भागात विभाजित करतात. प्रत्येक भागाला अर्धवर्तुळ असे म्हणतात.