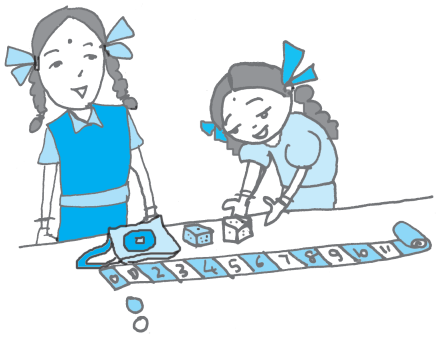
पूर्णांक

प्रकरण 6

6.1 प्रस्तावना

सुनीताच्या आईजवळ 8 केळी आहेत. सुनिताला आपल्या मैत्रिणींबरोबर सहलीला जायचे आहे. तिला आपल्याबरोबर 10 केळी न्यावयाची आहेत. तिची आई तिला 10 केळी देऊ शकेल काय? तिच्याजवळ 10 केळी नाहीत. त्यामुळे तिने शेजारणीकडून 2 केळी उधार आणली आणि परत देण्याचे आश्वासन दिले. सुनिताला 10 केळी दिल्यानंतर तिच्या आईजवळ किती केळी शिल्लक राहतील? तिच्याजवळ एकही केळे नाही परंतु 2 केळी परत करावयाची आहेत. जेव्हा तिच्याकडे काही केळी येतील, समजा 6 केळी आली तर ती त्यांतील 2 केळी परत करेल व तिच्याजवळ 4 केळी शिल्लक राहतील.

रोनाल्डो एक पेन खरेदी करण्यास बाजारात जातो. त्याच्याजवळ 12 रु. आहेत. परंतु पेनची किंमत 15 रु. आहे. दुकानदार त्याच्या नावावर 3 रु. उधार म्हणून वहीत लिहून ठेवतो. परंतु 3 रु. रोनाल्डोकडून घ्यावयाचे आहेत की द्यावयाचे आहेत, हे तो कसे लक्षात ठेवील? तो काही विशिष्ट रंग अथवा चिन्ह यासाठी वापरू शकेल का?

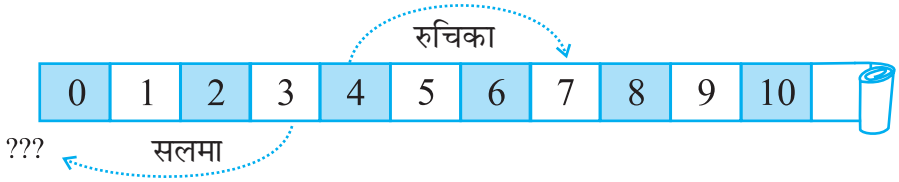


एका पट्टीवर समान अंतरावर 0 ते 5 अंक लिहिले आहेत. रुचिका व सलमा याच्या साहाय्याने एक खेळ खेळत आहेत.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

सुरुवातीला दोघीजणी शून्य अंकावर एक एक रंगीत टोकन ठेवतात. एका पिशवीत दोन फासे (dice) ठेवले आहेत. आणि ते एकापाठोपाठ एक काढले जातात. या फाशांपैकी एक फासा लाल रंगाचा आहे व दुसरा निळ्या रंगाचा आहे. लाल रंगाचा फासा आल्यास तो फेकल्यावर जो अंक वर असेल तेवढी घरे टोकन पुढे सरकवायचे आहे व जर फासा निळा असेल तर तो फेकल्यावर जो अंक वर असेल तेवढी घरे टोकन मागील घरात ठेवले जाते. प्रत्येक खेळीनंतर फासे पिशवीत परत ठेवले जातात. एका व्यक्तीनंतर दुसरी व्यक्ती फासे फेकेल. ज्याचे टोकन 25 या अंकावर प्रथम जाईल ती व्यक्ती खेळ जिंकते असे समजले जाते. त्या खेळाला सुरुवात करतात. रुचिका पिशवीत हात घालून फासा काढते तो लाल रंगाचा असतो. तो फेकल्यावर वरच्या बाजूस 4 अंक मिळतो म्हणूत ती पट्टीवर 4 या अंकावर टोकन ठेवते. नंतर सलमा पिशवीत हात घालून फासा काढते. तोही लालच येतो. तो फेकल्यावर त्यावर 3 हा अंक येतो. म्हणून ती तिचे टोकन पट्टीवर 3 अंकावर ठेवते.

दुसऱ्यावेळी रुचिकाला लाल फाशावर 3 हा अंक मिळतो आणि सलमाला निळ्या फाशावर 4 हा अंक मिळतो. आपण विचार करू शकतो का की दुसऱ्या प्रयत्नानंतर त्या आपले टोकन कोणत्या अंकावर ठेवतील? रुचिका पुढे जाते व आपले टोकन 4 + 3 म्हणजेच 7 व्या अंकावर ठेवते.



सलमा आपले टोकन शून्यावर ठेवते. रुचिकाला ते पटत नाही. ती म्हणते हे शून्याच्याही पलीकडे ठेवायला हवे. सलमाला ते पटते पण शून्याच्या मागे तर कोणताच अंक नाही. तिने काय करावे?

तेव्हा सलमा आणि रुचिकाने ही पट्टी दुसऱ्या बाजूस वाढविली व तिला निळा रंग दिला.

सलमाने असे सुचविले की ती शून्याच्या मागे एक अंक आहे. म्हणून त्याला निळा एक असे करता येईल. जर टोकन निळ्या एकवर असेल तर त्याच्या मागील स्थान निळा दोन, निळा दोन मागील स्थान निळा तीन असेल. याप्रमाणे शून्याच्या मागे जावयाचे असे त्या ठरवितात. परंतु त्यांना निळा कागद मिळत नाही. रुचिका असे म्हणते की आपण विरुद्ध दिशेला चाललो आहोत तर आपण दुसऱ्या एका चिन्हाचा प्रयोग करूया. पाहा, शून्यापेक्षा कमी संख्या दाखवण्यासाठी आपल्याला एका चिन्हाचा वापर करावा लागतो. यासठी त्या संख्येच्या मागे ऋण (–) चिन्हाचा उपयोग केला जातो. यावरून असे

–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

लक्षात येते की ऋण (negative) चिन्ह असलेली संख्या शून्यापेक्षा कमी असते. यांना ऋण असे म्हणतात.

हे करा

(कोण कुठे आहे)

एक ठिकाण शून्य या स्थानाने निश्चित करा. असे समजा की या ठिकाणापासून चालण्याचा प्रारंभ करतात. असे समजा की शून्यापासून उजवीकडे किती पावले चालले की '+' या चिन्हाने दाखविले जाते. व शून्यापासून डावीकडे चाललेल्या पावलांसाठी '-' चिन्हाने दाखविले जाते. जर मोहन शून्यापासून उजवीकडे 5 पावले चालला तर ते +5 याने दाखविले जाते व जर डेविड शून्यापासून डावीकडे 5 पावले चालला तर ते -5 याने दाखविले जाऊ शकते. आता खालील बाबी + अथवा - या चिन्हाने दाखवा.

a) शून्याच्या डावीकडे 8 पावले

b) शून्याच्या उजवीकडे 7 पावले

c) शून्याच्या उजवीकडे 11 पावले

d) शून्याच्या डावीकडे 6 पावले

हे करा

(माझ्या मागे कोण येते आहे?)

मागील उदाहरणात आपण पाहिले की आपल्याला धन संख्यांच्या बरोबर जावयाचे असेल तर शून्याच्या उजवीकडे जाणार आहोत. जर याप्रकारे केवळ एक पाऊल चालले तर आपल्याला त्या

–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

संख्येच्या पुढील संख्या (अनुवर्ती संख्या) (Successor) मिळते.

खालील संख्यांच्या (Successor) अनुवर्ती संख्या लिहा :

संख्या	अनुवर्ती संख्या
10	
8	
-5	
-3	
0	

जर आपणास ऋण संख्यबरोबर जावयाचे असेल तर आपल्याला डाव्या बाजूस जावे लागेल.

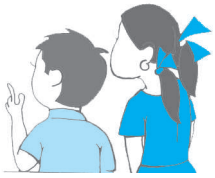
जर आपण डाव्या बाजूने एक पाऊल गेलो तर आपल्याला त्या संख्येच्या आधीची संख्या (Predecessor) मिळेल.

	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

खालील संख्यांच्या आधीची (Predecessor) संख्या लिहा

संख्या	आधीची संख्या
10	
8	
5	
3	
0	

6.1.1 मला चिन्हाने दाखवा.



आपण असे पाहिले की काही बाबतीत संख्यांच्या पूर्वी ऋण (-) चिन्ह लागते. उदा. जर आपण रोनाल्डने दुकानदाराला द्यावयाची रक्कम दाखवायचे ठरविले तर आपण – लिहू.

खाली एका दुकानदाराचे वहीतील पान दाखविलेले आहे. त्यात काही वस्तूंची विक्री करून त्याला नफा झाला की तोटा हे दाखविले आहे.

वस्तूचे नाव	नफा	तोटा	योग्य चिन्हाद्वारे स्पष्टीकरण
सरसूचे तेल	₹ 150		.....
तांदूळ		₹ 250	.....
मिरची	₹ 225		.....
गहू	₹ 200		.....
शेंगदाणा तेल		₹ 330	.....

नफा आणि तोटा या एकमेकांच्या विरुद्ध स्थिती आहेत. जर नफा हा '+' चिन्हाने दाखविला जातो तर तोटा '–' या चिन्हाने दाखवला जातो. वरील खाते उताऱ्यात योग्य चिन्हांनी रिकाम्या जागा भरा.

जिथे आपण चिन्हांचा उपयोग करतो अशा आणखी काही बाबी खाली दिल्या आहेत.

जसजसे आपण खाली जातो तसतशी उंची कमी होत जाते. याप्रमाणे समुद्र सपाटीपासूनची वरची उंची धन जिन्हाने दाखवू शकतो.

जर मिळवलेली रक्कम धन '+' चिन्हाने दाखविली जाते तर खर्च केलेली रक्कम ऋण '–' चिन्हाने दाखवावी लागेल. याप्रमाणे 0°C च्यावरील तापमान '+' चिन्हाने व 0°C खालील तापमान '–' दाखविता येईल.

उदाहरणार्थ 0° C च्या खाली 10° म्हणजे – 10°C असे लिहितात.

प्रयत्न करा

खालील गोष्टी योग्य चिन्हांच्या साहाय्याने लिहा :

(a) समुद्रसपाटीपासून 100 मी खाली.

(b) 0°C च्या 25°C वर तापमान.

(c) 0°C च्या 15°C खाली तापमान.

(d) 0 पेक्षा कमी कोणत्याही पाच संख्या.

6.2 पूर्णांक

सर्वप्रथम माहीत असलेल्या नैसर्गिक संख्या 1, 2, 3, 4,... या आहेत. जर आपण नैसर्गिक संख्यांच्या गटात शून्याचा अंतर्भाव केला तर आपल्याला एक नवा गट मिळतो. या गटातील संख्यांना पूर्ण संख्या म्हणतात. याप्रमाणे 0, 1, 2, 3, 4,... या पूर्ण संख्या आहेत. या संख्यांचा आपण प्रकरण 2 मध्ये अभ्यास केला आहे. आता आपल्याला माहीत आहे की ऋण संख्या –1, –2, –3, –4, –5, ... अशाही असतात.जर आपण पूर्ण संख्या व या ऋण संख्या एकत्र केल्या तर एक गट मिळतो.

हा गट 1, 2, 3, ..., –1, –2, –3, –4, ... असा आहे.

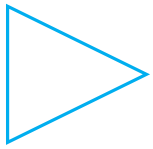
या गटात 1, 2, 3, ... या धन पूर्णांक व –1, –2, –3, ... यांना ऋण पूर्णांक संख्या म्हणतात.

हे आपण आकृतीच्या साहाय्याने पाहू. आकृतीसमोर लिहिल्याप्रमाणे या आकृत्या संख्यांचा संग्रह दाखवितात असे मानू...

नैसर्गिक संख्या

शून्य

पूर्ण संख्या

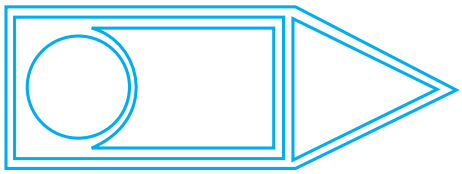


ऋण पूर्णांक संख्या

पूर्णांक

पूर्णांक हे खालील आकृतीद्वारा दाखविता येईल. यामध्ये या आधीच्या सर्व संख्यांचे संग्रह आहेत.

पूर्णांक



6.2.1 संख्या रेषेवर पूर्णांक दाखविणे

एक रेषा काढून त्यावर वरील आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे समान अंतरावर काही बिंदू घ्या. या बिंदूंपैकी एका बिंदूला '0' म्हणून घ्या शून्याच्या उजव्या बाजूला धन पूर्णांक +1, +2, +3 इ. या फक्त 1, 2, 3 ..... याप्रमाणे दाखविले आहेत. शून्याच्या डाव्या बाजूला ऋण पूर्णांक आहेत ते –1, –2, –3... असे दाखविले आहेत.

या आकृतीत –6 दाखविण्यासाठी आपल्याला शून्याच्या डाव्या बाजूला –6 बिंदू (पावले) जावे लागेल. (आकृती 6.1)

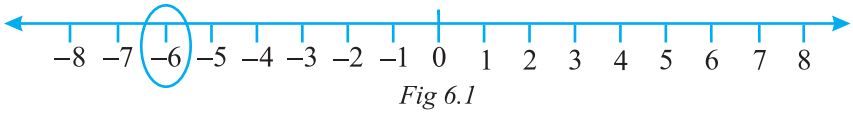


Fig 6.1

या रेषेवर +2 दाखविण्यासाठी आपल्याला शून्याच्या उजवीकडे 2 बिंदू (पावले) जावे लागेल. (आकृति 6.2)

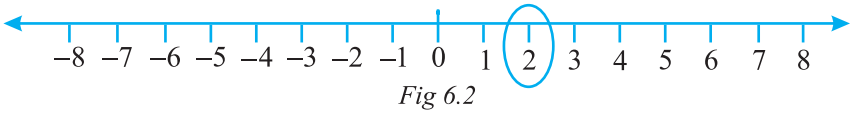


Fig 6.2

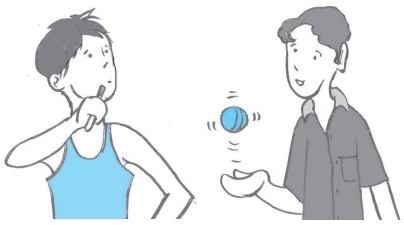
प्रयत्न करा

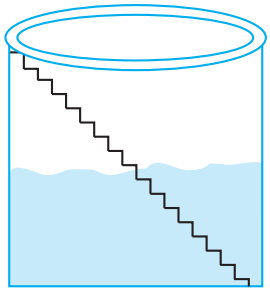
संख्या रेषेवर – 3, –7, – 4, – 8, – 1 आणि – 3 दाखवा.

6.2.2 पूर्णांकातील क्रम

रमण व इमरान एका गावात राहतात. तेथे पायऱ्या असलेली विहीर आहे. या विहिरीत तळापर्यंत एकूण 25 पायऱ्या आहेत.

एक दिवस रमण व इमरान विहीरीच्या आत उतरले व त्यांच्या लक्षात आले की पाणी खालून आठव्या पायरीपर्यंत आहे. त्यांनी हे पाहण्याचा निर्णय घेतला की पाऊस पडल्यावर विहीरीत किती पाणी येईल? त्यांनी आता असलेल्या पाण्याची पातळी शून्यने दाखविली व त्यावरील पायऱ्यांवर अनुक्रमे 1,2,3,4,.... लिहिले. पावसानंतर त्यानी पाहिले की पाण्याची पातळी 6व्या पायरी पर्यंत वाढली आहे. काही महिन्यानंतर त्यांनी पाहिले की पाण्याची पातळी शून्याच्या खाली तीन पायऱ्या गेली आहे. पाण्याची पातळी खाली गेलेल्या लगतच्या पायऱ्यांना क्रमांक देण्याचा ते विचार करू लागले. आपण त्यांना काही मदत करू शकतो का?



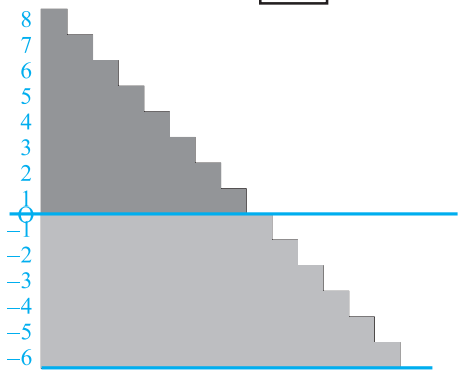


एकाएकी रमणला एका मोठ्या पाण्याच्या बांधावरती शून्याच्या खाली लिहिलेल्या संख्या आठवल्या. इमरान असे म्हणतो की शून्याच्या वरील व खालील संख्या या मधील फरक दाखवण्यासाठी काहीतरी पद्धत असली पाहिजे. तेव्हा रमणला आठवते की शून्याच्या खाली असलेल्या संख्यांना ऋण चिन्ह होते. यासाठी त्यांनी शून्याखालील पायरीला –1 अंक दिला. शून्याच्या खालील दुसऱ्या पायरीला –2 अंक दिला.

म्हणजे आता पाण्याची पातळी –3 आहे. (शून्याच्या खाली तीन पायऱ्या) या नंतर पाण्याचा उपयोग झाल्याने पाण्याची पातळी आणखी एक पायरी खाली जाते व –4 होते. आपण पहात असाल की –4 < –3 आहे.

वरील उदाहरण पाहून खालील रिकाम्या चौकटी > अथवा < चिन्हांचा उपयोग करुन भरा.

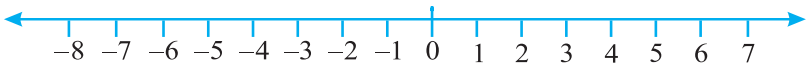
0 ☐ – 1 – 100 ☐ – 101



– 50 ☐ –70 50 ☐ – 51

– 53 ☐ –5 – 7 ☐ –1

पुन्हा एकदा पूर्णांक हे संख्यारेषेवर दाखविलेले पाहू.



आकृति 6.3

आपल्याला माहीत आहे की 7 > 4 आहे आणि संख्या रेषेवर संख्या 7 ही 4च्या उजवीकडे आहे.

याप्रमाणे 4 > 0 आणि 4 ही संख्या '0' च्या उजवीकडे आहे. आता 0 ही संख्या –3 च्या उजवीकडे आहे म्हणून 0 > –3 आहे. पुन्हा संख्या –3 ही –8 च्या उजवीकडे आहे म्हणून 3 > –8 आहे.

याप्रमाणे आपण पाहतो की संख्यारेषेवर जेव्हा आपण उजवीकडे जातो तेव्हा संख्यांची किंमत वाढत जाते व जेव्हा आपण डावीकडे जातो तेव्हा संख्यांची किंमत कमी होत जाते

म्हणून $-3 < -2, -2 < -1, -1 < 0, 0 < 1, 1 < 2, 2 < 3$

म्हणून पूर्णांकांच्या संख्येचा गट...., –5, –4, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5...., असा लिहिला जातो.

प्रयत्न करा

खालील संख्यांच्या जोडी मध्ये तुलना करून < अथवा > या चिन्हांचा उपयोग करा.

0 ☐ - 8 ; - 1 ☐ – 15

5 ☐ - 5 ; 11 ☐ 15

0 ☐ 6 ; - 20 ☐ 2

वरील तुलना पाहून रोहिणी खालील निष्कर्ष काढते.

(a) कोणताही धन पूर्णांक ऋण पूर्णांकापेक्षा मोठा असतो.

(b) शून्य धन पूर्णांकापेक्षा लहान असतो.

(c) शून्य ऋण पूर्णांकापेक्षा मोठा असतो.

(d) शून्य हा धन पूर्णांकही नाही व ऋण पूर्णांकही नाही.

(e) संख्यारेषेवर कोणतीही संख्या शून्याच्या उजवीकडे जितक्या लांब अंतरावर असेल तितकी मोठी असते.

(f) संख्यारेषेवर कोणतीही संख्या शून्याच्या डावीकडे जितक्या लांब अंतरावर असते तितकी लहान असते.

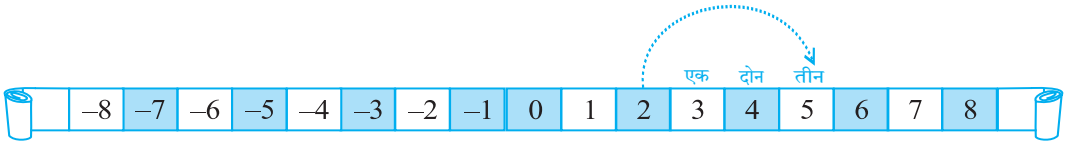
आपण याच्याशी सहमत आहात का? उदाहरण द्या.

उदाहरण 1 : संख्यारेषा पाहून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या. –8 व –2 यांमध्ये कोणत्या पूर्णांक संख्या येतात. यामधील कोणती संख्या सर्वात मोठी व कोणती संख्या सर्वात लहान आहे?

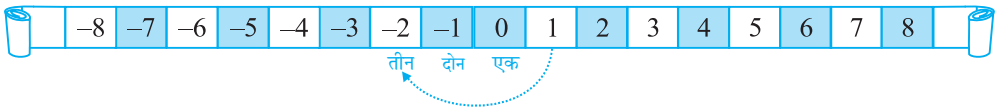
उत्तर : –8 व –2 यामध्ये येणाऱ्या पूर्णांक संख्या –7, –6, –5, –4 आणि –3 या आहेत. यातील –3 ही सर्वात मोठी व –7 ही सर्वात लहान संख्या आहे.

जर मी शून्यावर नसेन तर माझ्या चालण्याने काय होईल?

सलमा आणि रुचिका खेळत असलेल्या पहिल्या खेळाचा विचार करू. रुचिकाचा बिल्ला (टोकन) 2वर आहे. तिला पिशवीतून लाल फासा मिळतो व तो फेकल्यावर 3 संख्येचे दान पडते. याचा अर्थ ती 2 च्या उजवीकडे 3 घरे जाईल व त्याप्रमाणे ती 5 वर येईल.



आता जर सलमाचा बिल्ला 1 वर आहे व तिला पिशवीतून निळा फासा मिळतो. फासा फेकल्यावर तिला 3 चे दान पडते. याचा अर्थ ती 1 च्या डावीकडे 3 घरे जाईल. याप्रमाणे ती –2 वर पोहोचेल. **संख्या रेषा पाहून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.**



उदाहरण 2 : (a) –3 वर एक बिल्ला आहे. –9 वर जाण्यासाठी कोणत्या दिशेने व किती पावले जावे लागेल?

(b) आपण जर –6 पासून उजवीकडे 4 पावले चाललो तर कोणत्या संख्येवर पोहोचू?

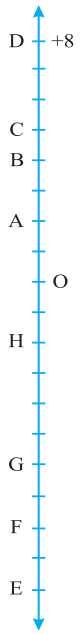
उत्तर : (a) आपल्याला –3च्या डावीकडे 6 पावले जावे लागेल.

(b) आपण –2 वर जाऊन पाहोचू.

(c) जर आपण – 6 च्या डावीकडे 4 पावले गेलो तर आपण – 2 वर पोहोचू.

उदाहरणसंग्रह 6.1

1. खालील गोष्टींचे विरुद्धार्थी लिहा.
   (a) वजनात वाढ (b) उत्तरेला 30 किमी
   (c) इसवीसन पूर्व 326 (d) 700 रु चा तोटा
   (e) समुद्रसपाटीपासून 100 मी उंच.
2. खालील वाक्यातील संख्यांच्या बाबतीत त्यांच्या संदर्भावरून योग्य चिन्ह वापरून पूर्णांकाच्या रूपात लिहा.
   (a) एक विमान जमिनीपासून दोन हजार मीटर उंचीवरून उडत आहे.
   (b) एक पाणबुडी समुद्रसपाटीपासून आठशे मीटर खोलीवरून चालली आहे.
   (c) खात्यामध्ये 200 रुपये जमा करा.
   (d) खात्यामधून 800 रुपये काढले.
3. खालील संख्या संख्यारेषेवर दाखवा.
   (a) +5 (b) –10 (c) +8 (d) –1 (e) –6
4. शेजारील आकृतीमध्ये एक उभी संख्यारेषा आहे. त्यावर पूर्णांक दाखविले आहेत. ती रेषा पाहा व खालील बिंदूंचे स्थान पाहीत करा.
   (a) D हा बिंदू –8 पूर्णांक आहे तर +8 हा कोणता बिंदू आहे.
   (b) G हा ऋण पूर्णांक आहे की धन पूर्णांक?
   (c) B आणि E च्या लगतचे पूर्णांक लिहा.
   (d) या संख्यारेषेवर दाखविलेल्या बिंदूंपैकी कोणाची किंमत सगळ्यात कमी आहे?
   (e) सर्व बिंदू त्यांच्या किमतीप्रमाणे उतरत्या क्रमाने लिहा.



5. वर्षातील एका दिवसाचे भारतातील 5 ठिकाणांचे तापमान खाली दिले आहे.

ठिकाण	**तापमान**	
सियाचिन	0^0 च्या खाली 10^0 C	.....
सिमला	0^0 च्या खाली 2^0 C	.....
अहमदाबाद	0^0 च्या वर 30^0 C	.....
दिल्ली	0^0 च्या वर 20^0 C	.....
श्रीनगर	0^0 च्या खाली 5^0 C	.....

(a) या ठिकाणांचे तापमान पूर्णांकांच्या स्वरूपात रिकाम्या जागी लिहा.

(b) खालील संख्यारेषा तापमान – डिग्री सेल्सिअसमध्ये दाखविते.

वरील ठिकाणांची नावे त्यांच्या तापमानाप्रमाणे या संख्यारेषेवर दाखवा.

(c) कोणते ठिकाण सर्वात अधिक थंड आहे.

(d) ज्यांचे तापमान 10^0 C च्या वर आहे अशा ठिकाणांची नावे लिहा.

6. खालील संख्यांच्या जोडीमधील कोणती संख्या संख्यारेषेवर दुसऱ्या संख्येच्या उजवीकडे आहे?

(a) 2,9 (b)) –3, –8 (c) 0, –1 (d) –11, 10 (e) –6, 6 (f) 1, –100

7. खालील संख्येच्या जोडीच्या मधे येणारे सर्व पूर्णांक लिहा. (वाढत जाणाऱ्या क्रमाने.)

(a) 0 आणि –7 (b) –4 आणिा 4 (c) –8 आणि –15 (d) –30 आणि –23

8. (a) –20 पेक्षा मोठे चार ऋण पूर्णांक लिहा.

(b) –10 पेक्षा लहान चार ऋण पूर्णांक लिहा.

9. खालील विधाने सत्य की असत्य ते लिहा. जर असत्य असतील तर सत्य होईल असे लिहा.

(a) संख्या रेषेवर –8, –10 च्या उजव्या बाजूस आहे.

(b) संख्या रेषेवर –100, –50 च्या उजव्या बाजूस आहे.

(c) सर्वात लहान ऋण पूर्णांक –1 आहे.

(d) –26 हा पूर्णांक –25 पेक्षा मोठा आहे.

10. एक संख्या रेषा काढा. आणि खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(a) जर आपण –2 च्या उजवीकडे 4 पावले चाललो तर आपण कोणत्या संख्येपाशी जाऊन पाहोचू.

(b) जर आपण 1च्या डावीकडे 5 पावले गेलो तर आपण कोणत्या संख्येपाशी पाहोचू?

(c) जर आपण संख्यारेषेवर –8 वर आहोत तर –13 वर पोहोचण्यासाठी आपल्याला कोणत्या दिशेस जावयास लागेल?

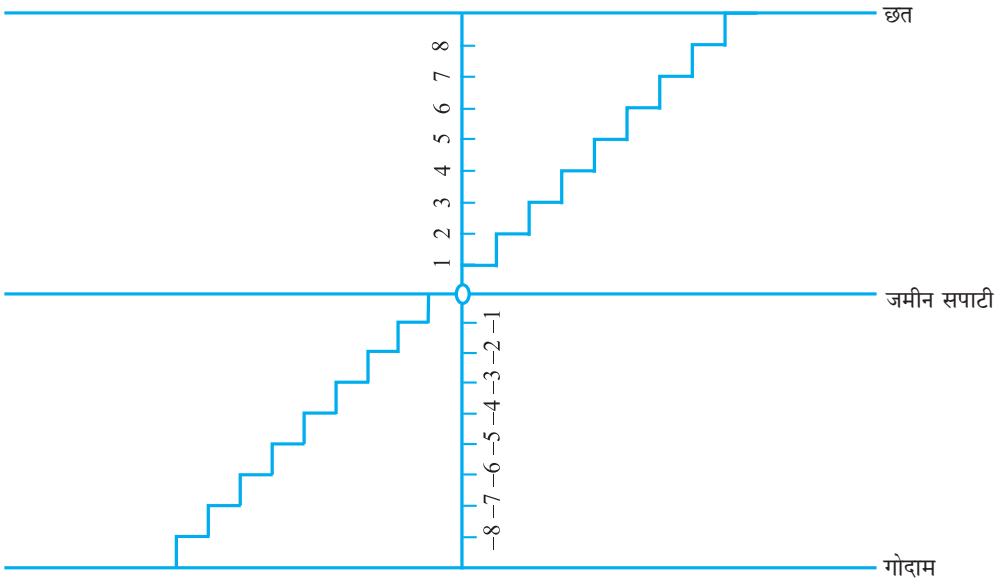
(d) जर आपण संख्यारेषेवर –6 वर आहोत तर –1 वर पोहोचण्यासाठी आपल्याला कोणत्या दिशेस जावयास लागेल?

6.3 पूर्णांकावरील क्रिया

हे करा

(वर अथवा खाली जाणे.)

मोहनच्या घरात घराच्या छतावर जाण्यासाठी आणि खाली गोदामात जाण्यासाठी जिने तयार केले आहेत. आपण जमिनीलगतच्या सपाटीस शून्य मानू. छतावर जाण्यासाठीच्या पायऱ्यांना घन पूर्णांक मानू आणि खाली जाणाऱ्या पायऱ्यांना ऋण पूर्णांक मानू.



खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या व आपली उत्तरे पूर्णांकामध्ये लिहा.

(a) जमिनीपासून 6 पायऱ्या वर चढा.

(b) जमिनीपासून 4 पायऱ्या खाली उतरा.

(c) जमिनीपासून 5 पायऱ्या वर चढा आणि तेथून 3 पायऱ्या आणखी वर चढा.

(d) जमिनीपासून 6 पायऱ्या खाली उतरा व तेथून आणखी 2 पायऱ्या खाली उतरा.

(e) जमिनीपासून 5 पायऱ्या खाली उतरा व तेथून 12 पायऱ्या वर चढा.

(f) जमिनीपासून 8 पायऱ्या खाली उतरा व तेथून 5 पायऱ्या वर चढा.

(g) जमिनीपासून 7 पायऱ्या वर चढा व तेथून 10 पायऱ्या खाली उतरा.

अमिनाने हे खालीलप्रमाणे लिहिले.

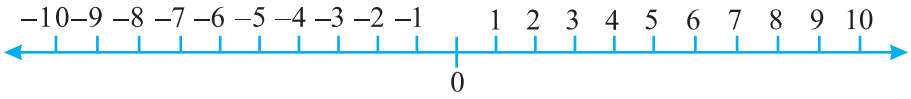
(a) +6 (b) −4 (c) (+3) + (+5) = +8 (d) (−6) + (−2) = −4

(e) (−5) + (+12) = 7 (f) (−8) + (+5) = −3 (g) (+7) + (−10) =

या उत्तरांमध्ये काही चुका आहेत. तुम्हाला ही उत्तरे तपासून बरोबर करता येतील का?

प्रयत्न करा

जमिनीवर संख्यारेषेप्रमाणे एक आकृती काढा. वरील उदाहरणात दिलेल्या प्रश्नांप्रमाणे काही प्रश्न तयार करा आणि मग ते आपल्या मित्रांना सोडवण्यास द्या.



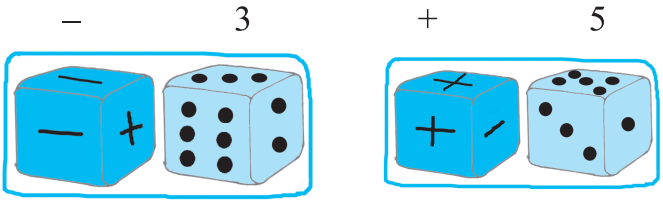
एक खेळ

ज्या पट्टीवर +25 पासून –25 पर्यंत पूर्णांक लिहिले आहेत. ती पट्टी घ्या.

	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7

दोन फासे घ्या एका फाशावर 1 ते 6 पर्यंतच्या संख्या लिहा. व दुसऱ्या फाशावर तीन '+' चिन्ह व तीन '–' चिन्ह असतील असे पाहा.

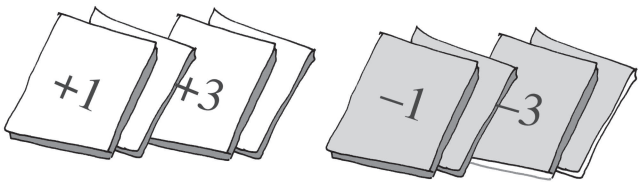
प्रत्येक खेळाडूला वेगवेगळ्या रंगाची बटणे (बिल्ले) द्या. प्रत्येक खेळाडू संख्यापट्टीवर शून्यावर बटणे ठेवतील. दोन्ही फासे फेकल्यावर खेळाडू त्या फाशांवर काय मिळाले ते पाहील. जर पहिल्या फाशावर 3 आणि दुसऱ्या फाशावर – आले तर याचा अर्थ –3 मिळाले असा होईल. पहिल्या फाशावर 5 आले आणि दुसऱ्या फाशावर + आले तर आपण +5 मिळाले असा अर्थ होईल.



जेव्हा एखाद्या खेळाडूला + चिन्ह मिळते तेव्हा तो पुढील बाजूस (+25च्या बाजूला) व – चिन्ह मिळते तेव्हा तो विरुद्ध बाजूस (–25 च्या बाजूला) जाईल.

प्रत्येक खेळाडू दोन फासे एका वेळेस फेकतो. ज्या खेळाडूचे बटण –25 वर जाते तो खेळातून बाद होतो व ज्या खेळाडूचे बटण +25 वर जाते तो जिंकतो. फाशांऐवजी आपण 12 पत्त्यांच्या आकाराची कार्डे घेऊन त्यावर +1, +2, +3, +4, +5, +6 आणि –1, –2, –3, –4, –5, –6 असे लिहून व कार्ड पिसून एक कार्ड काढू शकतो.

कमला, रेशमा आणि मीनू हा खेळ खेळत आहेत.



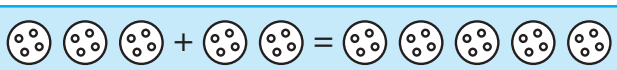
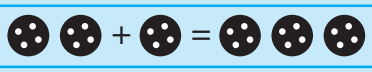
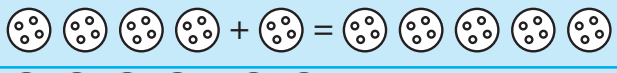
कमलाला तीन लागोपाठच्या प्रयत्नांत +3, +2, +6 मिळाले. तिने आपला बिल्ला +11 वर ठेवला. रेशमाने –5 +3 आणि –1 मिळाले. तिने आपला बिल्ला –3 वर ठेवला. मीनूला तीन प्रयत्नांत +4, –3 आणि –2 मिळाले. तिचा बिल्ला –1 अथवा +1 यापैकी कोठे ठेवला जाईल?

हे करा

दोन वेगवेगळ्या रंगांची पांढरी व काळी बटणे घ्या एक पांढरे बटण म्हणजे +1 आणि एक काळे बटण म्हणजे –1 समजा. एक पांढरे बटण व एक काळे बटण मिळून शून्य होईल. [1 + (–1) = 0]

खालील कोष्टकात काही पूर्णांक बटणांच्या साहाय्याने दाखविले आहेत.

रंगीत बटन	पूर्णांक
	= 5
	= – 3
	= 0

	*(+ 3) + (+ 2) = +5*
	*(– 2) + (– 1) = –3*
	.....
=	.....

या रंगीत बटनांच्या मदतीने पूर्णांकांची बेरीज करा. खालील सारणी पूर्ण करा.

जेव्हा आपल्याकडे दोन धन पूर्णांक असतील तर त्यांची बेरीज करा. जसे (+3) + (+2) = +5 [= 3+2] जर दोन ऋण पूर्णांक असतील तरीही त्यांची बेरीज करा. पण बेरजेला वजा चिन्ह द्या. जसे (–2) + (–1) = –3

प्रयत्न करा

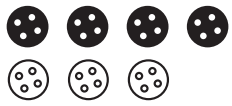
खालील क्रिया करा.

(a) (–11) + (–12) (b) (+10) + (+4)

(c) (–32) + (–25) (d) (+33) + (+40)

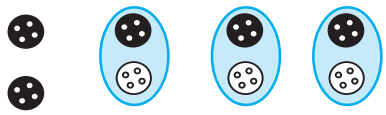
आता या बटणांच्या साहाय्याने एक धन पूर्णांक व एक ऋण पूर्णांक यांच्या बेरजा करा. एक पांढरे बटण व एक काळे बटण यांना जोडीने बाजूला करा. [कारण (+1) + (−1) = 0]. उरलेली बटणे मोजा.

(a) (– 4) + (+ 3)

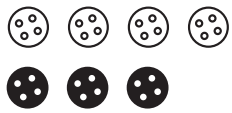


= (– 1) + (– 3) + (+ 3)

= (– 1) + 0 = – 1

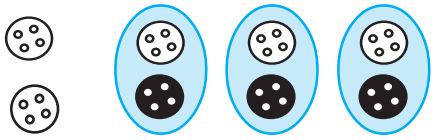


(b) (+ 4) + (– 3)



= (+ 1) + (+ 3) + (– 3)

= (+ 1) + 0 = + 1



आपण पाहू शकतो की 4−3 चे उत्तर 1 आहे आणि −4 +3 = −1 आहे.

म्हणजेच आपल्याला जेव्हा एक ऋण पूर्णांक व एक धन पूर्णांक यांची बेरीज करावयाची असेल तेव्हा या पूर्णांकांचे संख्यात्मक मूल्य पहावे लागेल. (दोन्हींमधील मोठी संख्या कोणती ते पाहण्यासाठी + व − या चिन्हांचा विचार सोडावा लागेल.) खाली काही उदाहरणे दिली आहेत.

(c) (+5) + (−8) = (+5) + (−5) + (−3) = 0 + (−3) = −3

(d) (+6) + (−4) = (+2) + (+4) + (−4) = (+2) + 0 = +2

प्रयत्न करा

खालील प्रत्येक क्रिया करा.

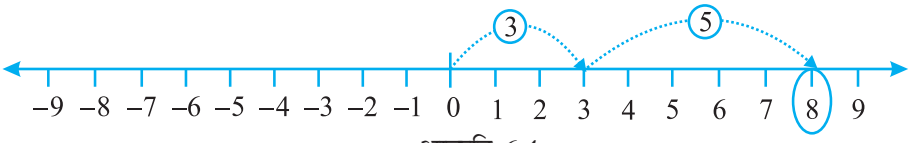
(a) (−7) + (+8) (b) (−9) + (+13)

(c) (+7) + (−10) (d) (+12) + (−7)

6.3.1 संख्यारेषेवर पूर्णांकांची बेरीज

वेगवेगळ्या बटणांच्या साहाय्याने पूर्णांकांची बेरीज करणे प्रत्येक वेळी सोपे जाते असे नाही. बेरजेसाठी आपण संख्यारेषेचा वापर करायला हवा का?

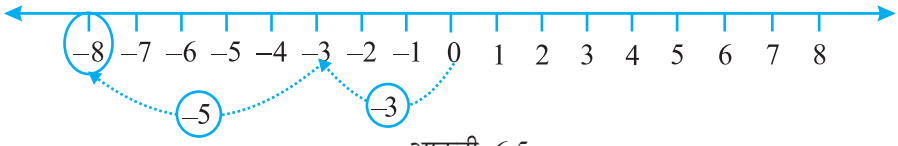
(i) संख्यारेषेवर 3 आणि 5ची बेरीज करू



आकृति 6.4

संख्यारेषेवर आपण शून्यापासून 3 पावले उजवीकडे जाऊ आपण 3 वर पोहोचतो. आता 3 पासून 5 पावले उजवीकडे जाऊ आपण 8 वर पोहोचतो. (आकृती 6.4) याप्रमाणे 3+5 = 8 मिळतात.

(ii) संख्यारेषेवर –3 आणि –5 यांची बेरीज करू.



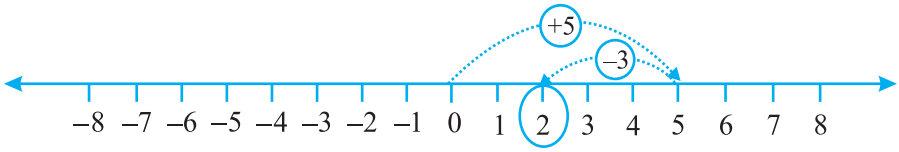
आकृती 6.5

संख्यारेषेवर आपण 0 पासून सुरुवात करून 3 पावले डावीकडे जाऊ व –3 वर पोहोचल्यावर 5 पावले आणखी डावीकडे जाऊ.(आकृती 6.5)

याप्रमाणे (–3) + (–5) = –8 मिळतात.

आपण पाहिले की आपण दोन ऋण पूर्णांकांची बेरीज केली तर एक ऋण पूर्णांक मिळतो.

(iii) आपल्याला संख्यारेषेवर (+5) आणि (–3) यांची बेरीज करावयाची आहे.

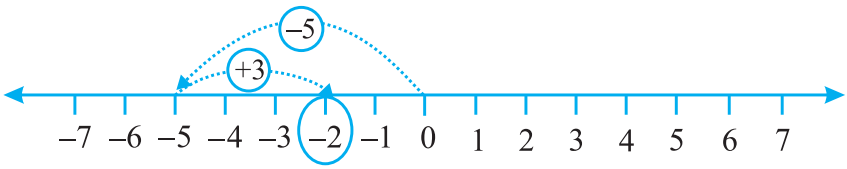


आकृती 6.6

पहिल्यांदा शून्यापासून सुरुवात करून आपण 5 पावले उजवीकडे जाऊ व 5 वर पोहोचू. नंतर 5 पासून 3 पावले डावीकडे जाऊ व आपण 2 वर पोहोचू. (आकृती 6.6)

याप्रमाणे (+5) + (–3) = 2 येते.

(iv) याप्रमाणे आपण संख्यारेषेवर (–5) आणि +3 यांची बेरीज करू.



आकृती 6.7

आपण 0 पासून सुरुवात करून डावीकडे 5 पावले जाऊ व −5 वर पोहोचतो. नंतर −5 पासून 3 पावले उजवीकडे जाऊ. आपण −2 वर पोहोचतो.

याप्रमाणे (−5) + (+3) = −2 येते. (आकृती 6.7)

जर कोणत्याही पूर्णांकात एक धन पूर्णांक मिळविला तर येणारा पूर्णांक दिलेल्या पूर्णांकापेक्षा मोठा असतो व कोणत्याही पूर्णांकात एक ऋण पूर्णांक मिळविला तर येणारा पूर्णांक हा दिलेल्या पूर्णांकापेक्षा लहान असतो.

प्रयत्न करा

1. संख्यारेषेचा उपयोग करून खालील क्रिया करा.

   (a) (−2) + 6 (b) −6 +2

   अशाच दोन बेरजा तयार करा व संख्यारेषेच्या साहाय्याने त्या सोडवा.

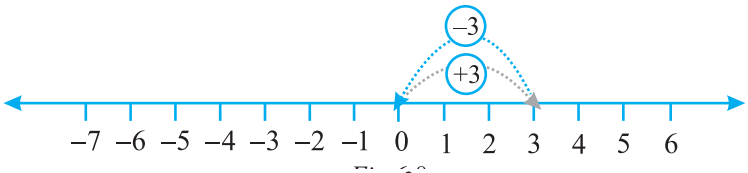
2. संख्यारेषेचा उपयोग करून खालील बेरजा करा.

   (a) (+7) + (−11) (b) (−13) + (+10)

   (c) (−7) + (+9) (d) (+10) + (−5)

असे 5 प्रश्न तयार करा व त्या बेरजा काढा

चला 3 आणि −3 यांची बेरीज करू. 0 पासून सुरुवात करून प्रथम 3 पावले उजवीकडे जाऊ. +3 वर पोहोचल्यावर 3 पावले डावीकडे जाऊ. आपण कोठे पोहोचतो?



आकृती 6.8

आकृती 6.8मध्ये आपण पाहू शकतो की आपण 0 वर पोहोचलो आहोत. म्हणजेच 3 + (−3) = 0 आहे. याप्रमाणे आपण +2 व −2 यांची बेरीज केली तर 0 मिळेल. याप्रमाणे संख्यांच्या जोडीत +3, −3 अथवा +2, −2 यांच्या बेरजा केल्यास 0 मिळेल. अशा संख्यांना दुसरीचा बेरीज व्यस्त (Additive inverse) म्हणतात.

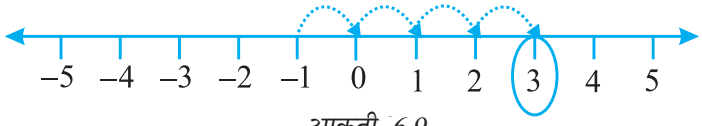
0 चा बेरीज व्यस्त काय आहे? −7 चा बेरीज व्यस्त काय?

उदाहरण 3 : संख्यारेषेचा उपयोग करून पूर्णांक लिहा.

(a) जो −1 पेक्षा 4 ने अधिक (मोठा) आहे.

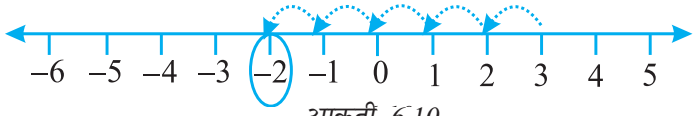
(b) जो 3 पेक्षा 5 ने कमी आहे.

उत्तर : (a) आपल्याला −1 पेक्षा 4ने अधिक असा पूर्णांक हवा आहे. आपण −1 पासून सुरुवात करू आणि 4 पावले उजवीकडे जाऊ. आपण 3 वर जाऊन पोहोचू आकृती 6.9 मध्ये पाहा. म्हणून −1 पेक्षा 4 ने अधिक पूर्णांक 3 आहे.



आकृती 6.9

(b) आपल्याला 3 पेक्षा 5 ने कमी पूर्णांक हवा आहे. आपण 3 ने सुरुवात करू व 3 पासून 5 पावले डावीकडे जाऊ. याप्रमाणे आपण –2 वर पोहोचू. आकृती 3.10 पाहा.



आकृती 6.10

म्हणून 3 पेक्षा 5 ने कमी असलेला पूर्णांक –2 आहे.

उदारहण 4 : (–9) + (+4) + (–6) + (+3) ही बेरीज काढा.

उत्तर : आपण धन संख्या एकत्र व ऋण संख्या एकत्र अशी पुन: मांडणी करू.

(–9) + (+4) + (–6) + (+3)

= (–9) + (–6) + (+4) + (+3) = (–15) + (+7)

= –8 + (–7) + (+7) = 8 + 0 = –8

उदारहण 5 : (30) + (–23) + (–63) + (+55) किंमत काढा.

उत्तर : 30 + (+55) + (–23) + (–63)

= 85 + (–86) = –1

उदारहण 6 : (–10), (92), (84) आणि (–5) यांची बेरीज करा.

उत्तर : (–10) + (92) + (84) + (–15)

= (–10) + (–15) + (92) + 84

= (–25) + 196 = 151

उदाहरणसंग्रह 6.2

1. **संख्यारेषेचा उपयोग करून पूर्णांक काढा.**
   (a) 5 पेक्षा 3 ने अधिक (b) –5 पेक्षा 3 ने अधिक
   (c) 2 पेक्षा 6 ने कमी (d) –2 पेक्षा 3 ने कमी
2. **संख्यारेषेचा उपयोग करून बेरीज करा.**
   (a) 9 + (–6) (b) 5 + (–11)
   (c) (–1) + (–7) (d) –5 + 10
   (e) (–1) + (–2) + (–3) (f) (–2) + 8 + (–4)

3. **संख्या रेषेचा उपयोग न करता बेरजा करा.**

(a) 11 + 4 (b) (−13) + (+18)

(c) (−10) + (+19) (d) (−250) + (+150)

(e) (−380) + (−270) (f) (−217) + (−100)

4. **खालील बेरजा करा.**

(a) 137 व −354 (b) −52 आणि 52

(c) −312, 39 व 192 (d) −50, −200 व 300

5. **खालील किमती काढा.**

(a) (−7) + (−9) + 4 +16

(b) (37) + (−2) + (−65) + (−8)

6.4 संख्यारेषेच्या साहाय्याने पूर्णांकांची वजाबाकी

आपण संख्यारेषेवर दोन पूर्णांकांची बेरीज पाहिली आहे. उदा. 6+2 पाहा. आपण 6 वरून सुरुवात करतो आणि 2 पावले उजवीकडे जातो. आपण 8 वर पोहोचतो. म्हणून 6+2 = 8 आहेत. (आकृती 6.11)

आकृती 6.11

आपण हे देखील पाहिले की संख्यारेषेवर 6 आणि (−2) यांची बेरीज करण्यासाठी आपण 6 ने सुरुवात करतो व 2 पावले. डावीकडे जातो. आपण 4 वर पोहोचतो. म्हणून आपल्याला 6 + (−2) = 4 मिळतात. (आकृती 6.12)

आकृती 6.12

याप्रमाणे धन पूर्णांकाची बेरीज करायला संख्यारेषेवर उजवीकडे जाऊ व ऋण पूर्णांकाची बेरीज करायला संख्यारेषेवर डावीकडे जाऊ.

पूर्ण संख्यांच्या बाबतीतही संख्या रेषेचा उपयोग करताना आपण 6 मधून 2 वजा करताना 2 पावले डावीकडे गेलो होतो. (आकृती 6.13)

म्हणून 6−2 =4 आहे.

आकृती 6.13

आपण 6 − (−2) साठी काय करू? संख्या रेषेवर आपण डाव्या बाजूला जाऊ की उजव्या बाजूला जाऊ?

जर आपण डाव्या बाजूला गेलो तर आपण 4 वर पोहोचू. मग आपल्याला म्हणावे लागेल की 6 – (–2) = 4 हे बरोबर नाही. आपल्याला माहीत आहे की 6–2 = 4 आहे. आणि 6 –2 = 6 – (–2) होत नाही. म्हणून आपल्याला उजव्या बाजूला जायला हवे. (आकृती 6.14)

आकृती 6.14

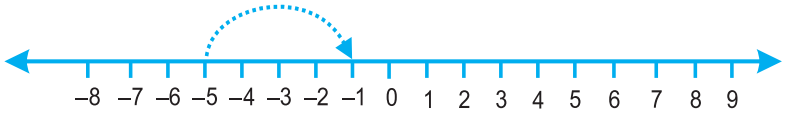
याचाच अर्थ असा की जेव्हा आपण एक ऋण पूर्णांक वजा करतो तेव्हा आपल्याला एक मोठा पूर्णांक मिळतो. याचाच दुसऱ्याप्रकारे विचार करा. –2 याचा बेरीज व्यस्त +2 आहे. याचाच अर्थ 6 मधून –2 वजा करावयाचे म्हणजे 6 मध्ये –2 चा बेरीज व्यस्त मिळवायचा.

म्हणून 6 – (–2) = 6 + 2

आता आपण –5 –(–4) संख्यारेषेच्या साहाय्याने काढू.

आपण असे म्हणू शकतो की हे –5 +4 च्या बरोबर आहे. कारण –4चा बेरीज व्यस्त 4 आहे. आपण संख्यारेषेवर –5 पासून सुरुवात करून 4 पावले उजवीकडे जाऊ : (आकृती 6.15.). आपण –1 वर पोहोचू.

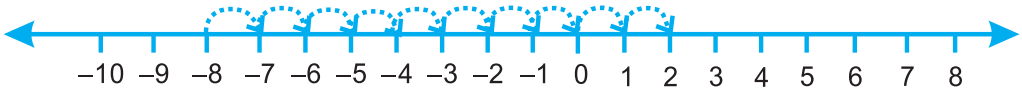
म्हणजेच –5 +4 = –1 आहे. याप्रमाणे –5 – (–4) = –1 होईल.



आकृती 6.15

उदाहरण 7 : संख्या रेषेचा उपयोग करून (–8) – (–10) याची किंमत काढा.

उत्तर : –10 चा बेरीज व्यस्त –10 आहे. म्हणून (–8) – (–10) = –8 + 10 आहे.



आकृति 6.16

संख्यारेषेवर आपण –8 पासून 10 पावले उजवीकडे जाऊ. आपण 2 वर पोहोचतो. (आकृती 6.16) म्हणून –8 – (–10) = 2 आहे. याप्रमाणे एका पूर्णांकातून दुसरा पूर्णांक वजा करताना आपण असे करू शकतो की वजा करावयाच्या पूर्णांकाचा बेरीज व्यस्त हा पहिल्या पूर्णांकात मिळवू. (बेरीज करू).

उदाहरण 8 : (–10) मधून –4 वजा करा.

उत्तर : (–10) – (–4) = (–10) + (–4 चा बेरीज व्यस्त)

= –10 + 4 = –6

उदाहरण 9 : −3 मधून +3 वजा करा.

उत्तर : −3 − (+3) = (−3) + (+3 चा बेरीज व्यस्त)

= (−3) + (−3) = −6

उदाहरणसंग्रह 6.3

1. **वजाबाकी करा.**

(a) 35 − (−20) (b) 72 − (90)

(c) (−15) − (−18) (d) (−20) − (−13)

(e) 23 − (−12) (f) (−32) − (−40)

2. **रिकाम्या जागी >, <, = यापैकी योग्य चिन्ह लिहा.**

(a) (−3) + (−6)..... (−3) − (−6)

(b) (−21) + (−10)..... (−31) − (−11)

(c) 45 − (−11)..... 57 + (−4)

(d) (−25) − (−42)..... (−42) − (−25)

3. **रिकाम्या जागा भरा.**

(a) (−8) + ... = 0 (b) 13 + ... = 0

(c) 12 +(−12) = ... (d) (−4) + ... = −12

(e) ..... −15 = −10

4. **खालील किमती काढा.**

(a) (−7) − 8 − (−25) (b) (−13) + 32 − 8 − 1

(c) (−7) + (−8) + (−190) (d) 50 − (40) − (−2)

आपण काय चर्चा केली?

1. आपल्याला अनेक वेळा ऋण संख्यांची आवश्यकता असते. जेव्हा आपल्याला संख्यारेषेवर शून्यापेक्षा कमी म्हणजे शून्याखाली विचार करायचा असतो तेव्हा याची गरज असते यांना ऋण संख्या म्हणतात. याचा उपयोग आपल्याला तापमान, नदी अथवा तलावातील पाण्याची पातळी, आपले बँकेतील खाते, उधारी या संदर्भात होतो.

2. ...., −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4,.... या संख्यांना पूर्णांक संख्या म्हणतात. −1, −2, −3, −4,..... या संख्या ऋण आहेत. यांना ऋण पूर्णांक म्हणतात. 1, 2, 3, 4,.... या संख्यांना धन पूर्णांक म्हणतात.

3. कोणत्याही संख्येत एक मिळविल्यास त्याची पुढची (अनुवर्ती) संख्या मिळते व एक वजा केल्यास त्याच्या आधीची संख्या मिळते.

4. आपण पाहिले की,

   (a) बेरजेच्या बाबतीत जर समान चिन्ह असेल तर बेरीज करून ते चिन्ह देतो.

      (i) दोन धन पूर्णांकांच्या बेरजेपासून एक धन पूर्णांक मिळतो

      [उदा.(+3) + (+2) = +5]

      (ii) दोन ऋण पूर्णांकांची बेरीज केली असता एक ऋण पूर्णांक मिळतो.

      [उदा.(−2) + (−1) = −3]

   (b) दोन भिन्न चिन्हांच्या संख्यांच्या बेरजेमध्ये वजाबाकी करून मोठ्या संख्येचे चिन्ह देतात.

   (दोन भिन्न चिन्हांच्या संख्येच्या बेरजेमध्ये चिन्हाशिवाय मोठ्या संख्येतून लहान संख्या वजा करून मोठ्या संख्येचे चिन्ह देतात.)

   (c) जेव्हा एक धनपूर्णांक व एक ऋण पूर्णांक यांची बेरीज असेल तेव्हा चिन्हाशिवायच्या मोठ्या संख्येतून लहान संख्या वजा करून मोठ्या संख्येचे चिन्ह देतात.

   [उदा : (+4) + (−3) = +1 आणि (−4) + (+3) = +1]

5. आपण पाहिले की पूर्णांकांची बेरीज अथवा वजाबाकी संख्या रेषेवर दाखविता येते.