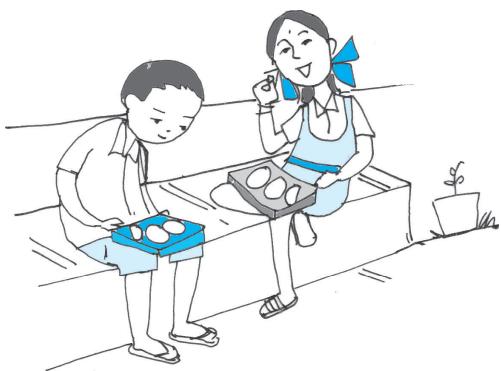


# अपूर्णांक

## 7.1 प्रस्तावना

सुभाष इयत्ता IV व V वीमध्ये अपूर्णांक (Fractions) शिकला होता. परंतु याबाबतीत ते त्याला नीटसे समजले नव्हते. त्यामुळे जेव्हा वेळ मिळेल आणि संधी मिळेल तेथे तो त्याचा उपयोग करून बघत असे. एकदा तो आपला मधल्या सुट्टीतील खाण्याचा डबा विसरला. त्याची मैत्रीण फरीदाने त्याला डबा खायला बोलाविले. तिच्या डव्यात पाच पुन्या होत्या. म्हणून सुभाष आणि फरीदाने दोन-दोन पुन्या घेतल्या व पाचव्या पुरीचे फरीदाने बरोबर दोन भाग (अर्धे भाग) केले व तिने एक अर्धा भाग आणि सुभाषने एक अर्धा भाग घेतला. याप्रमाणे सुभाष व फरीदाने प्रत्येकी दोन पुन्या व एक अर्धी पुरी घेतली.



२ पुन्या + अर्धी पुरी - सुभाष

२ पुन्या + अर्धी पुरी - फरीदा

आपल्या दैनंदिन व्यवहारात कोणकोणत्या प्रसंगात अपूर्णांकांचा वापर करावा लागतो?

सुभाषला माहीत आहे की अर्धा हा  $\frac{1}{2}$  असा लिहितात. पुरी खाताना त्याने अर्ध्या पुरीचे पुन्हा दोन भाग केले व फरीदाला विचारले. हा तुकडा पूर्ण पुरीचा कितवा भाग अथवा कोणता

अपूर्णांक आहे. काहीही उत्तर न देता फरीदाने आपल्याकडील अध्या पुरीचे दोन सारखे भाग करून सुभाषने केलेल्या भागांबरोबर ठेवले. ती म्हणाली की हे चारही भाग मिळून एक पूर्ण भाग होत आहे. प्रत्येक भाग



आकृती 7.1

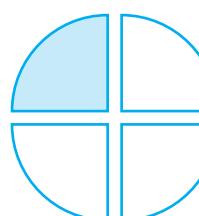
हा पूर्ण पुरीचा एक चतुर्थांश (चवथा भाग) आहे व चार भाग मिळून  $\frac{4}{4}$

अथवा 1 पूर्ण होईल. जेवत असताना त्यांनी आधी ते काय शिकले त्याची उजळणी केली. 4 समान भागांपैकी 3 भाग  $\frac{3}{4}$  ने दाखवितात. याप्रमाणे

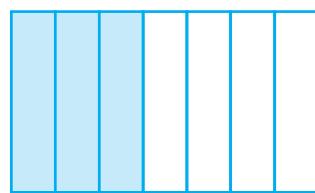
जर आपण एका वस्तूचे 7 समान भाग करून त्यापैकी 3 घेतले तर ते

म्हणजे  $\frac{3}{7}$  मिळतात. (आकृती 7.3).  $\frac{1}{8}$  म्हणजे आपण आठ समान भाग

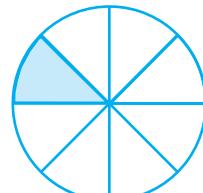
करून त्यापैकी एक घेतो. (आकृती 7.4)



आकृती 7.2



आकृती 7.3



आकृती 7.4

फरीदा म्हणाली अपूर्णांक म्हणजे अशी संख्या आहे की जी एका पूर्ण वस्तूचा भाग दाखविते. पूर्ण म्हणजे एक पूर्ण वस्तू अगर वस्तूच्या समूह असतो. सुभाष म्हणाला की आपण जे भाग करू ते सर्व समान असले पाहिजेत.

## 7.2 अपूर्णांक

पुन्हा एकदा अपूर्णांकांचा विचार करू.

अपूर्णांक म्हणजे एका समूहाचा अथवा एका वस्तूचा एक भाग.  $\frac{5}{12}$  हा अपूर्णांक आहे. आपण हे 'पाच बारांश' असे वाचतो.

12 काय दाखवितो? ही समान भागांची संख्या आहे की ज्यांमध्ये पूर्ण वस्तूचे भाग केले आहेत.



5 काय दाखविते? ही संख्या 12 भागांपैकी किती भाग घेतले ती संख्या दाखविते.

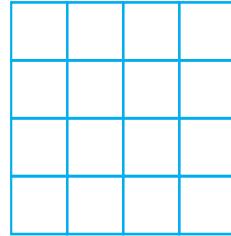
येथे 5 ला अंश ( numerator ) आणि 12 ला छेद ( denominator ) असे म्हणतात.

$\frac{3}{7}$  मधील अंश सांगा.  $\frac{4}{15}$  मधील छेद कोणता ?

### ■ हा खेळ खेळा

आपल्या मित्राबरोबर हा खेळ खेळू शकता. शेजारील आकृतीतील चौकट विचारात घ्या. त्याच्या आणखी प्रती काढा.

एखाद्या अपूर्णांकाचा विचार करा. उदा.  $\frac{1}{2}$ .

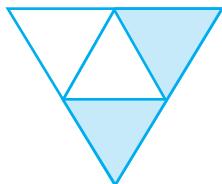


आपल्यापैकी प्रत्येक विद्यार्थी आकृतीतील  $\frac{1}{2}$  भाग रंगवेल. अट अशी आहे की एकाने रंगविलेला भाग दुसऱ्यासारखा असता कामा नये.

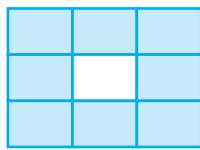


### सराव 7.1

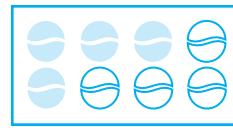
- खालील आकृतीतील रंगविलेल्या भागासाठी अपूर्णांक लिहा.



(i)



(ii)



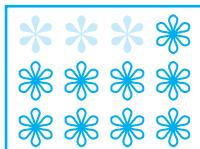
(iii)



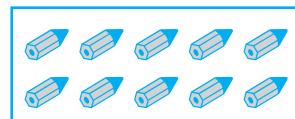
(iv)



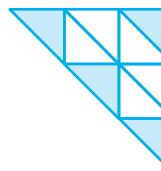
(v)



(vi)



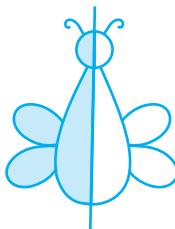
(vii)



(viii)



(ix)



(x)

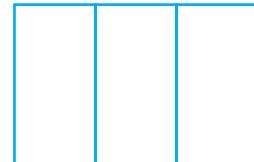
2. आकृतीखाली दिलेल्या अपूर्णाकांप्रमाणे आकृतीतील भाग छायांकित करा.



(i)  $\frac{1}{6}$



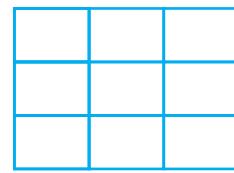
(ii)



(iii)



(iv)



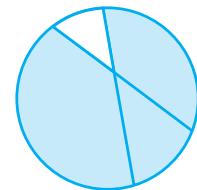
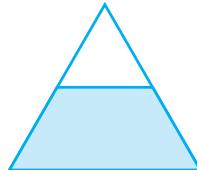
(v)

3. खाली काही चूक असेल तर शोधा.

हे  $\frac{1}{2}$  आहे

हे  $\frac{1}{4}$  आहे

हे  $\frac{3}{4}$  आहे



4. एका दिवसातील 8 तास म्हणजे कोणता अपूर्णाक?
5. एका तासाची 40 मिनिटे हे अपूर्णाक रूपात लिहा.
6. आर्या, अभिमन्यु आणि विवेक हे एकमेकांमध्ये वाटून बरोबर डबा खातात. आर्या एक जामचे व एक भाजीचे सॅण्डविच आणते. बाकीचे दोघेजण आपला डबा आणायला विसरतात. आर्या आपले सॅण्डविच इतरांबरोबर वाटून खायला तयार असते. पण प्रत्येकाला प्रत्येक सॅण्डविचचा समान भाग मिळायला हवा.
  - (a) आर्या आपले सॅण्डविच प्रत्येकाला समान भाग मिळेल अशा पद्धतीने कसे वाटेल?
  - (b) प्रत्येक मुलाला एका सॅण्डविचचा कितवा भाग मिळेल?
7. कांचन कपड्यांवर नक्षी काढण्याचे काम करते. 30 पैकी तिने आतापर्यंत 20 कपड्यांना रंग लावला आहे. एकूणपैकी किती नक्षी काढली ते अपूर्णाकात लिहा.
8. 2 ते 12 पर्यंत नैसर्गिक संख्या लिहा. यापैकी मूळ संख्या किती ते अपूर्णाकात लिहा.
9. 102 पासून 113 पर्यंत नैसर्गिक संख्या लिहा. यापैकी मूळ संख्या किती ते अपूर्णाकात लिहा.

10. खालील आकृतीत किती वर्तुळात X आहे ते अपूर्णांकात लिहा.



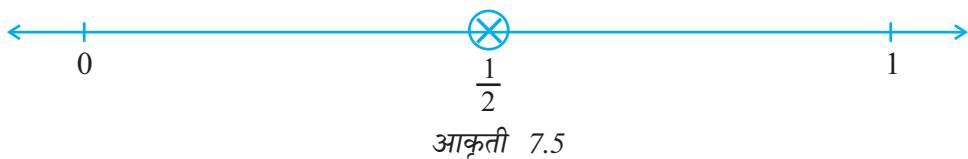
11. वाढदिवसाच्या दिवशी क्रिस्तिनला एक सी.डी. प्लेअर मिळतो. ती 3 सी.डी. विकत आणते व 5 सी.डी. तिला भेट मिळतात, तर एकूण सी.डी.पैकी तिने खरेदी केलेल्या सी.डी. या अपूर्णांकात किती?

### 7.3 संख्यारेषेवर अपूर्णांक

संख्यारेषेवर  $0, 1, 2, \dots$  दाखवायला आपण शिकलो आहोत. आपण अपूर्णांक संख्यारेषेवर दाखवू शकतो का? एक संख्या रेषा काढा. यावर आपण  $\frac{1}{2}$  दाखवू शकतो का?  $\frac{1}{2}$  ही 0 पेक्षा मोठी व 1 पेक्षा लहान आहे.

म्हणजे  $\frac{1}{2}$  ही 0 आणि 1 यांच्या दरम्यान असायला हवी.

आपल्याला  $\frac{1}{2}$  दाखवायचे आहे म्हणून आपण 0 आणि 1 यामधील अंतराचे दोन समान भाग करून एक भाग  $\frac{1}{2}$  ने दाखवितो. (आकृती 7.5 मध्ये दाखविले आहे.)



संख्यारेषेवर  $\frac{1}{3}$  दाखविण्यासाठी 0 आणि 1 यामधील अंतराचे किती समान भाग करायला हवेत?

आपण 0 आणि 1 यामधील अंतराचे 3 समान भाग करू व एक भाग  $\frac{1}{3}$  ने दाखवू. (आकृती 7.6) मध्ये दाखवले आहे.



या संख्यारेषेवर  $\frac{2}{3}$  दाखवू शकतो का?  $\frac{2}{3}$  म्हणजे 3 समान भागांपैकी 2 भाग हे आकृती 7.7 मध्ये दाखविले आहे.



आकृती 7.7

याप्रमाणे आपण  $\frac{0}{3}$  आणि  $\frac{3}{3}$  संख्यारेषेवर कसे दाखवू?

$\frac{0}{3}$  म्हणजे 0 हा बिंदू आहे व  $\frac{3}{3}$  म्हणजे 1 आहे. म्हणजेच  $\frac{3}{3}$  म्हणजे 1 हा बिंदू दाखविला जाऊ शकतो. (आकृती 7.7 मध्ये दाखविले आहे.)

जर आपल्याला संख्यारेषेवर अपूर्णांक  $\frac{3}{7}$  दाखवायचे असेल तर 0 आणि 1 यांच्या दरम्यानच्या

अंतराचे किती समान भाग करावे लागतील? जर  $\frac{3}{7}$  हा अपूर्णांक P या बिंदूने दाखविला तर 0 आणि

P यांच्या दरम्यान किती समान भाग असतील?  $\frac{0}{7}$  आणि  $\frac{7}{7}$  हे कोठे असतील?

### प्रयत्न करा

- संख्यारेषेवर  $\frac{3}{5}$  दाखवा.
- संख्यारेषेवर  $\frac{1}{10}, \frac{0}{10}, \frac{5}{10}$  आणि  $\frac{10}{10}$  हे दाखवा.
- 0 आणि 1 यांच्या दरम्यान आपण आणखी काही अपूर्णांक दाखवू शकतो का? असे पाच अपूर्णांक लिहा आणि संख्यारेषेवर दाखवा.
- 0 आणि 1 यांच्या दरम्यान किती अपूर्णांक आहेत. विचार करा, चर्चा करा आणि आपले उत्तर लिहा.

### 7.4 उचित अपूर्णांक

आपण अपूर्णांक संख्यारेषेवर कसे दाखवायचे ते पाहिले.  $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}, \frac{0}{3}, \frac{5}{8}$  हे अपूर्णांक वेगवेगळ्या संख्यारेषेवर दाखवा.

यापैकी कोणताही अपूर्णांक 1 च्या उजवीकडे आहे का? हे सर्व अपूर्णांक 1 पेक्षा लहान असल्याने 1 च्या डावीकडे आहेत. प्रत्यक्षात आपण 1 पेक्षा लहान अपूर्णांकच पाहिले आहेत. यांना उचित अपूर्णांक (छेदाधिक अपूर्णांक) म्हणतात. उचित अपूर्णांक हे एकाचा कितवा समान भाग ते दाखवितात. यामध्ये छेद हा एकाला किती समान भागात विभागायचे ते दाखवितो व अंश म्हणजे यापैकी किती भाग घ्यायचा ते दाखवितो. कोणत्याही उचित अपूर्णांकात अंश हा छेदापेक्षा लहान असतो.

## प्रयत्न करा

1. उचित अपूर्णांक असे लिहा की
  - (a) ज्याचा अंश 5 व छेद 7 आहे.
  - (b) ज्याचा छेद 9 व अंश 5 आहे.
  - (c) याच्या अंशा व छेदाची बेरीज 10 आहे. आपण असे किती अपूर्णांक लिहू शकतो?
  - (d) ज्याचा छेद त्याच्या अंशापेक्षा 4 ने अधिक आहे.  
(असे 5 अपूर्णांक सांगा. असे किती अपूर्णांक सांगता येतील?)
2. एक अपूर्णांक दिला असेल तर तो पाहून, तुम्ही कसे सांगू शकाल की तो
  - (a) 1 पेक्षा लहान आहे      (b) 1 च्या बरोबर आहे
3. रिकाम्या जागेत योग्य असे  $>$ ,  $<$  व  $=$  हे भरा.
 

$\frac{1}{2} \square 1$	$\frac{3}{5} \square 1$	$1 \square \frac{7}{8}$
$\frac{4}{4} \square 1$	$\frac{0}{6} \square 1$	$\frac{2005}{2005} \square 1$

## 7.5 अंशाधिक अपूर्णांक आणि मिश्र अपूर्णांक

अनघा, रवि, रेशमा आणि जॉनने वाटून खाऊ खाल्ला. त्यांनी आपल्याबरोबर पाच सफरचंदेही आणली होती. डबा खाऊन झाल्यावर त्यांना सफरचंदेही वाटून खावयाची होती. ते ती कशाप्रकारे वाटू शकतील?

अनघा म्हणाली आपण एक-एक पूर्ण व पाचव्यातील  $\frac{1}{4}$  प्रत्येकाला घेऊ.



अनघा



रवि



रेशमा



जॉन

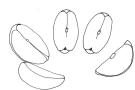
रेशमा म्हणाली ते ठीक आहे. पण आपण प्रत्येक सफरचंदाचे चार भाग करून प्रत्येकातील एक चतुर्थांश घेऊ शकतो.



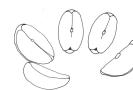
अनघा



रवि



रेशमा



जॉन

रवि म्हणाला वाटण्याच्या दोन्ही पद्धतीत सर्वांना समान भाग मिळेल व तो 5 चतुर्थांश असेल. कारण 4 चतुर्थांश म्हणजे एक पूर्ण होईल. म्हणजेच प्रत्येकाला एक पूर्ण व एक चतुर्थांश भाग मिळेल. प्रत्येकाचा वाटा 5 भागिले 4 आहे. हे आपण  $5 \div 4$  लिहू शकतो का? जॉनने सांगितले हे आपण  $\frac{5}{4}$  असे लिहू शकतो. अनंदा म्हणाली  $\frac{5}{4}$  मध्ये अंश हा छेदापेक्षा अधिक आहे. ज्या अपूर्णांकात अंश हा छेदापेक्षा जास्त असतो. त्यांना अंशाधिक अपूर्णांक (improper fractions) म्हणतात.

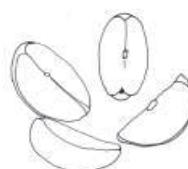
म्हणजेच  $\frac{3}{2}, \frac{12}{7}, \frac{18}{5}$  हे सर्व अंशाधिक अपूर्णांक आहेत.

1. छेद 7 असलेले पाच अंशाधिक अपूर्णांक लिहा.
2. छेद 11 असलेले पाच अंशाधिक अपूर्णांक लिहा.

रविने जॉनला विचारले हा अपूर्णांक दुसऱ्या पद्धतीने लिहिता येतो का? अनंदाने जी पद्धत सांगितली त्याचा उपयोग लिहिताना होईल का?



हा 1 आहे  
(एक)

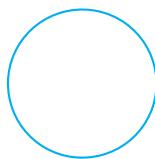


यामधील प्रत्येक  $\frac{1}{4}$  आहे  
(एक चतुर्थांश)

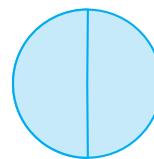
आकृती 7.8

जॉन म्हणाला अनंदाने सांगितले त्याप्रमाणे लिहिता येते. त्या पद्धतीने प्रत्येकाला 1 पूर्ण वा एक चतुर्थांश असा वाटा मिळतो. हा  $1 + \frac{1}{4}$  आहे म्हणजेच  $1\frac{1}{4}$  असेही लिहिले जाते. लक्षात ठेवा  $1\frac{1}{4}$  आणि  $\frac{5}{4}$  दोन्ही एकच आहे. (आकृती 7.8)

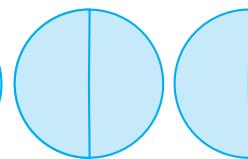
आठवा की फरीदाने किती पुन्या खाल्ल्या होत्या? तिने  $2\frac{1}{2}$  पुन्या खाल्ल्या होत्या. (आकृती 7.9).



हा 1 आहे



आकृती 7.9



हा  $2\frac{1}{2}$  आहे

$2\frac{1}{2}$  मध्ये किती अर्धे भाग छायांकित केले आहेत? यामध्ये 5 अर्धे-अर्धे भाग छायांकित आहेत.

म्हणजेच हा अपूर्णांक  $\frac{5}{2}$  आहे. हा  $\frac{5}{4}$  नाही हे दिसते आहे.

$1\frac{1}{4}$  आणि  $2\frac{1}{2}$  यांसारख्या अपूर्णांकांना मिश्र अपूर्णांक म्हणतात. एका मिश्र अपूर्णांकात एक भाग पूर्ण असतो व एक अपूर्णांक असतो.

आपल्याला मिश्र संख्या कोठे कोठे मिळतात? काही उदाहरणे द्या.

**उदाहरण 1 :** खालील अपूर्णांक मिश्र संख्यांच्या स्वरूपात लिहा.

- (a)  $\frac{17}{4}$       (b)  $\frac{11}{3}$       (c)  $\frac{27}{5}$       (d)  $\frac{7}{3}$

**उत्तर** : (a)  $\frac{17}{4}$       
$$\begin{array}{r} 4 \quad \overline{)17} \\ - \quad 16 \\ \hline 1 \end{array}$$

म्हणून 4 पूर्ण आणि  $\frac{1}{4}$  म्हणेजच  $4\frac{1}{4}$

(b)  $\frac{11}{3}$       
$$\begin{array}{r} 3 \quad \overline{)11} \\ - \quad 9 \\ \hline 2 \end{array}$$

म्हणून 3 पूर्ण आणि      म्हणजेच  $3\frac{2}{3}$

$$\left[ \text{दुसऱ्या प्रकारे, } \frac{11}{3} = \frac{9+2}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = 3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3} \right]$$

(c) आणि (d) मधील वरीलप्रमाणे दाखविण्याचा प्रयत्न करा.

याप्रमाणे अंशाधिक अपूर्णांक आपण मिश्र अपूर्णांकाच्या रूपात लिहू शकतो. यासाठी अंशाला छेदाने भागून आपल्याला भागाकार व बाकी काढावी लागेल आणि मग

मिश्र अपूर्णांक हा भागाकार  $\frac{\text{बाकी}}{\text{भाजक}}$  या स्वरूपात लिहितात.

**उदाहरण 2 :** खालील मिश्र अपूर्णांक अंशाधिक अपूर्णांकाच्या स्वरूपात लिहा.

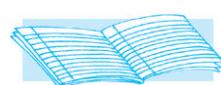
- (a)  $2\frac{3}{4}$       (b)  $7\frac{1}{9}$       (c)  $5\frac{3}{7}$

**उत्तर :** (a)  $2\frac{3}{4} = \frac{(2 \times 4) + 3}{4} = \frac{11}{4}$

(b)

$$(c) 5\frac{3}{7} = \frac{(5 \times 7) + 3}{7} = \frac{38}{7}$$

याप्रमाणे आपण एक मिश्र अपूर्णांक अंशाधिक अपूर्णांक स्वरूपात रूपांतरित करू शकतो. यासाठी पूर्ण संख्येला छेदाने गुणून त्यामध्ये अंश मिळवितो व  $\frac{\text{पूर्ण} \times \text{छेद}}{\text{छेद}} + \text{अंश}$  हा अपूर्णांक मिळतो.



## उदाहरणसंग्रह 7.2

1. संख्या रेषा काढा व खालील अपूर्णांक बिंदूच्या स्वरूपात दाखवा.

- (a)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$       (b)  $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}$       (c)  $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}$

2. खालील अंशाधिक अपूर्णांक मिश्र अपूर्णांकाच्या रूपांतरित करा.

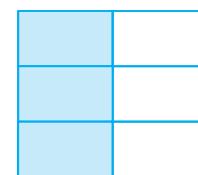
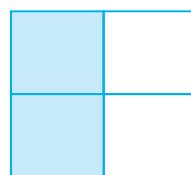
- (a)  $\frac{20}{3}$       (b)  $\frac{11}{5}$       (c)  $\frac{17}{7}$   
 (d)  $\frac{28}{5}$       (e)  $\frac{19}{6}$       (f)  $\frac{35}{9}$

3. खालील अपूर्णांक अंशाधिक अपूर्णांकात रूपांतरित करा.

- (a)  $7\frac{3}{4}$       (b)  $5\frac{6}{7}$       (c)  $2\frac{5}{7}$   
 (d)  $10\frac{3}{5}$       (e)  $9\frac{3}{7}$       (f)  $8\frac{4}{9}$

## 7.6 सममूल्य अपूर्णांक

खालील आकृतीतील अपूर्णांक पाहा. (आकृती 7.10) :



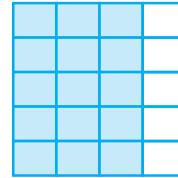
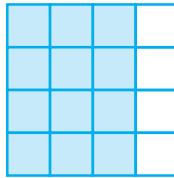
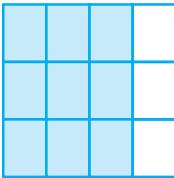
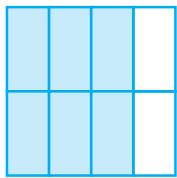
आकृती 7.10

हे अपूर्णांक  $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$  आहेत. हे एकूण भागांपैकी किती भाग घेतले ते दाखवित आहेत. जर आपण या अपूर्णांकांचे चित्रातील आकार एकमेकांवर ठेवले तर ते सर्व एकावर एक बरोबर बसतील. तुम्ही सहमत आहात का?

अशा अपूर्णांकांना सममूल्य अपूर्णांक म्हणतात. वरील अपूर्णांकांशी सममूल्य असणारे आणखी (Equivalent fractions) 3 अपूर्णांक सांगा.

### प्रयत्न करा

- आणि ; आणि आणि आणि हे सममूल्य अपूर्णांक आहेत? कारण सांगा.
- सममूल्य अपूर्णांकाचे आणखी एक उदाहरण द्या.
- आकृतीतील छायांकित भागासाठी अपूर्णांक ओळखा. हे सममूल्य अपूर्णांक आहेत का?



### सममूल्य अपूर्णांकांचा अभ्यास

$\frac{6}{7} = \frac{4}{8} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \dots, \frac{36}{72}, \dots$ , यामधील प्रत्येक अपूर्णांक हा सममूल्य अपूर्णांक आहे. हे सगळे एका पूर्ण भागाचा समान भाग दर्शवितात.

### विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा

अपूर्णांक एका पूर्ण भागाचा समान भागच का दाखवितात? यापैकी एक अपूर्णांक दुसऱ्यासारखा सममूल्य आपण कसा मिळवू शकतो?

आपण पाहतो की आहे.

याप्रमाणे अथवा

येईल.

एका दिलेल्या अपूर्णांकाचे सममूल्य अपूर्णांक माहीत करण्यासाठी आपण त्याचा अंश व छेद यांना एकाच शून्येतर संख्याने गुणतो.

रजनी म्हणते की या अपूर्णांकाचे सममूल्य अपूर्णांक

$$\frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}, \quad \frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{3}{9}, \quad \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12} \text{ असे आहेत.}$$

तुम्ही तिच्याशी सहमत आहात का? स्पष्ट करा.

## प्रयत्न करा

1. खालीलपैकी प्रत्येकाचे पाच सममूल्य अपूर्णक माहीत करून घ्या.

- (i)  $\frac{2}{3}$
- (ii)  $\frac{1}{5}$
- (iii)  $\frac{3}{5}$
- (iv)  $\frac{5}{9}$

### इतर पद्धती

सममूल्य अपूर्णक माहीत करून घेण्यासाठी आणखी पद्धती आहेत का? आकृती 7.11 पाहा.



येथे  $\frac{4}{6}$  छायांकित आहे.



येथे  $\frac{2}{3}$  छायांकित आहे.  
आकृती 7.11

यामध्ये छायांकित वस्तूंची संख्या समान आहे. म्हणजेच  $\frac{4}{6}$  आणि  $\frac{2}{3}$  हे सममूल्य अपूर्णक आहेत.

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2}$$

एका दिलेल्या अपूर्णकाचा सममूल्य अपूर्णक मिळविण्यासाठी आपण त्या अपूर्णकाचे अंश व छेद यांना एका समान शून्येतर संख्येने भागू शकतो.

$\frac{12}{15}$  चा एक सममूल्य अपूर्णक  $\frac{12 \div 3}{15 \div 3} = \frac{4}{5}$  आहे.

$\frac{9}{15}$  या अपूर्णकाचा असा सममूल्य काढता येईल का ज्याचा छेद 5 असेल.

**उदाहरण 3** :  $\frac{2}{5}$  चा असा सममूल्य शोधा की ज्याचा अंश 6 आहे.

**उत्तर** :  $2 \times 3 = 6$  हे आपल्याला माहीत आहे. सममूल्य अपूर्णक मिळविण्यासाठी दिलेल्या अपूर्णकाच्या अंश व छेद यांना 3 ने गुणले पाहिजे.

$$\text{म्हणून } \frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$$

म्हणून अपेक्षित सममूल्य अपूर्णक आहे.

हे आपण चित्राच्या रूपात दाखवू शकाल का?

**उदाहरण 4** :  $\frac{15}{35}$  चा सममूल्य अपूर्णक असा काढा की ज्याचा छेद 7 असेल.

**उत्तर** : आपल्याला  $\frac{15}{35} = \frac{\square}{7}$  हवे आहे.

आपण दोन्हीचे छेद पाहू—  $35 \div 5 = 7$  म्हणून आपण  $\frac{15}{35}$  चे अंश आणि छेद

दोघांना 5 ने भागावे लागेल.

$$\text{म्हणून } \frac{15}{35} = \frac{15 \div 5}{35 \div 5} = \frac{3}{7}$$

$$\text{याप्रमाणे आपल्याला } \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \text{ असे मिळेल.}$$

### गंमतीशीर गोष्ट

सममूल्य अपूर्णांकांच्या बाबतीत एक गंमतीशीर बाब आहे. दिलेले कोष्टक पूर्ण करा. पहिल्या दोन ओळी पूर्ण केल्या आहेत.

सममूल्य अपूर्णांक	पहिलीचे अंश दुसरीचा छेद यांचा गुणाकार	दुसरीचे अंश व पहिलीचा छेद यांचा गुणाकार	गुणाकार समान आहेत का?
$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$	$1 \times 9 = 9$	$3 \times 3 = 9$	होय
$\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$	$4 \times 35 = 140$	$5 \times 28 = 140$	होय
$\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$			
$\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$			
$\frac{3}{7} = \frac{24}{56}$			

वरील कोष्टकावरून आपण काय निष्कर्ष काढू शकतो? या सर्वांमध्ये पहिल्या अपूर्णांकाचा अंश व दुसरीचा छेद यांचा गुणाकार हा दुसरीचे अंश व पहिलीचा छेद यांच्या गुणाकाराबरोबर असतो. या दोन्ही गुणाकारांना (अंश व छेद यांचा) तिरकस गुणाकार (cross multiplication) म्हणतात. सममूल्य अपूर्णांकांच्या इतर जोड्यांमध्येही तिरकस गुणाकार माहीत करून घ्या.

आपण असे सममूल्य अपूर्णांक मिळवू शकतो का की ज्यामध्ये हा तिरकस गुणाकार समान नाही? या नियमाप्रमाणे कधीकधी सममूल्य अपूर्णांक मिळविता येतो.

**उदाहरण 5** :  $\frac{2}{9}$  चा सममूल्य अपूर्णांक असा मिळवा की ज्याचा छेद 63 आहे.

**उत्तर** : दिलेले आहे  $\frac{2}{9} = \frac{\square}{63}$

यासाठी असायला हवे.

$$\text{पण } 63 = 7 \times 9 \text{ आहे. म्हणून } 9 \times \square = 2 \times 7 \times 9, \\ = 14 \times 9 = 9 \times 14$$

म्हणून

म्हणून  $\square = 14$  असेल. (तुलना करून)

$$\text{म्हणून } \frac{2}{9} = \frac{14}{63} \text{ आहे.}$$

## 7.7 अपूर्णांकाचे संक्षिप्त रूप

$\frac{36}{54}$  हा एक अपूर्णांक दिला आहे. याचा सममूल्य अपूर्णांक असा मिळवू की ज्याच्या अंश व छेदामध्ये समान अवयव नसेल.

हे आपण कसे करू शकू? 36 आणि 54 या दोन्हीचा 2 हा एक अवयव आहे. म्हणून

$$\frac{36}{54} = \frac{36 \div 2}{54 \div 2} = \frac{18}{27}, 18 \text{ आणि } 27 \text{ मध्येही सामाईक अवयव आहेत. हे } 1, 3 \text{ आणि } 9 \text{ आहेत.}$$

$$\text{म्हणून } \frac{18}{27} = \frac{18 \div 9}{27 \div 9} = \frac{2}{3}$$

आता 2 आणि 3 मध्ये सामाईक अवयव नाही. म्हणून आपल्याला हवा असलेला अपूर्णांक  $\frac{2}{3}$  आहे. अशा अपूर्णांकाला दिलेल्या अपूर्णांकाचे संक्षिप्तरूप (simplest form) असे म्हणतात.

एका अपूर्णांकाचे संक्षिप्तरूप (simplest form) म्हणजे असा सममूल्य अपूर्णांक की ज्यामध्ये त्याच्या अंश व छेदामध्ये 1 शिवाय दुसरा आणखी कोणताही सामाईक अवयव नसतो.

### सर्वात सोपी रीत

दिलेल्या अपूर्णांकाचे सममूल्य सरळरूप माहीत करण्यासाठी सोपा रस्ता म्हणजे अंश व छेद यांचा म.सा.वि. काढून या म.सा.वि.ने अंश व छेद यांना भागावे म्हणजे आपल्याला सममूल्य संक्षिप्तरूप मिळते.

### एक खेळ

खाली काही गमतीशीर सममूल्य अपूर्णांक दिले आहेत. यामध्ये 1 ते 9 पर्यंतचे अंक एकदाच आले आहेत.

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{58}{174}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{79}{158}$$

असे आणखी दोन सममूल्य अपूर्णांक शोधा.



$\frac{36}{24}$  हा अपूर्णांक पाहा.

36 आणि 24 चा म.सा.वि. 12 आहे.

$$\text{म्हणून } \frac{36 \div 12}{24 \div 12} = \frac{3}{2}$$

याप्रमाणे म.सा.वि. चा अपूर्णांकाचे सरळरूप मिळविण्यासाठी आपल्याला मदत होते.

### प्रयत्न करा

1. खालील अपूर्णांकाचे संक्षिप्तरूप लिहा.

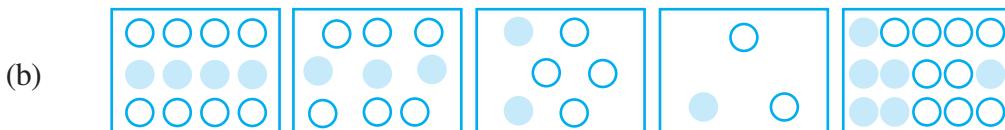
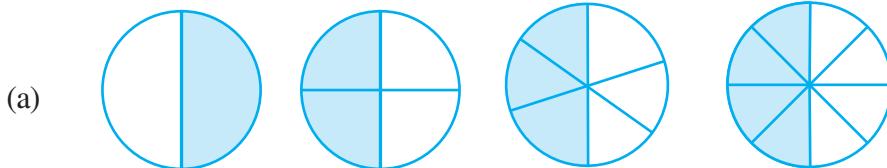
(i)  $\frac{15}{75}$    (ii)  $\frac{16}{72}$    (iii)  $\frac{17}{51}$    (iv)  $\frac{42}{28}$    (v)  $\frac{80}{24}$

2.  $\frac{49}{64}$  हे संक्षिप्तरूप आहे का?

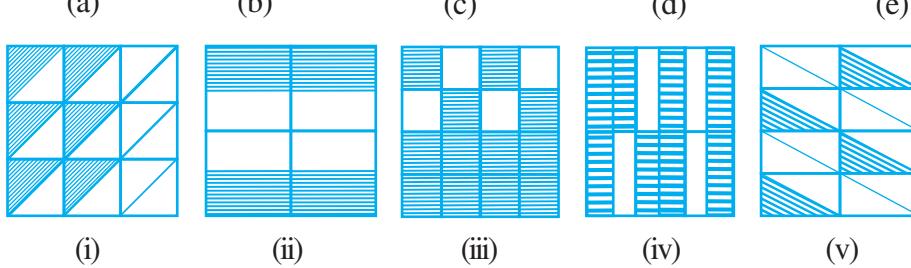
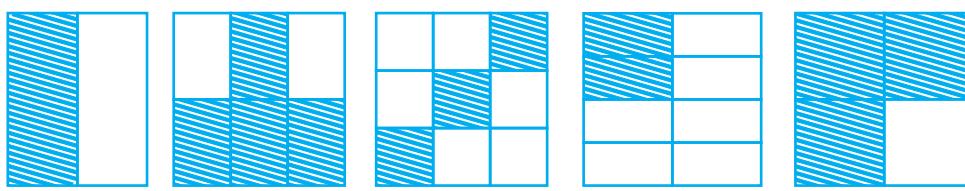


### सराव 7.3

1. प्रत्येक चित्रातील छायांकित भागासाठी अपूर्णांक लिहा. हे सर्व सममूल्य आहेत का?



2. प्रत्येक आकृतीतील छायांकित भागासाठी अपूर्णांक लिहा व प्रत्येक ओळीतील सममूल्य अपूर्णांक शोधा.



3. खालीलपैकी प्रत्येकात  $\square$  या जागी योग्य संख्या लिहा.
- (a)  $\frac{2}{7} = \frac{8}{\square}$       (b)  $\frac{5}{8} = \frac{10}{\square}$       (c)  $\frac{3}{5} = \frac{\square}{20}$   
 (d)  $\frac{45}{60} = \frac{15}{\square}$       (e)  $\frac{18}{24} = \frac{\square}{4}$
4.  $\frac{3}{5}$  चे असे सममूल्य असा काढा की
- (a) ज्याचा छेद 20 आहे.      (b) अंश 9 आहे.  
 (c) छेद 30 आहे.      (d) अंश 27 आहे.
5.  $\frac{36}{48}$  चा सममूल्य असा काढा की
- (a) अंश 9 आहे.      (b) छेद 4 आहे.
6. खालील अपूर्णांक सममूल्य आहेत की नाही ते शोधा :
- (a)  $\frac{5}{9}, \frac{30}{54}$       (b)  $\frac{3}{10}, \frac{12}{50}$       (c)  $\frac{7}{13}, \frac{5}{11}$
7. खालील अपूर्णांक संक्षिप्तरूपात लिहा.
- (a)  $\frac{48}{60}$       (b)  $\frac{150}{60}$       (c)  $\frac{84}{98}$   
 (d)  $\frac{12}{52}$       (e)  $\frac{7}{28}$
8. रमेशजवळ 20, शीलजवळ 50 आणि जमालजवळ 80 पेन्सिली होत्या. 4 महिन्यांमध्ये रमेशने 10, शीलने 25 आणि जमालने 40 पेन्सिली वापरल्या. प्रत्येकाने वापरलेल्या पेन्सिलींचा अपूर्णांक लिहा. हे सर्व सममूल्य आहेत का ?
9. सममूल्यांच्या जोड्या शोधा व प्रत्येकासाठी आणखी दोन सममूल्य लिहा.
- (i)  $\frac{250}{400}$       (a)  $\frac{2}{3}$   
 (ii)  $\frac{180}{200}$       (b)  $\frac{2}{5}$   
 (iii)  $\frac{660}{990}$       (c)  $\frac{1}{2}$   
 (iv)  $\frac{180}{360}$       (d)  $\frac{5}{8}$   
 (v)  $\frac{220}{550}$       (e)  $\frac{9}{10}$

## 7.8 समच्छेदी अपूर्णांक

समान छेद असलेल्या अपूर्णांकांना समच्छेदी अपूर्णांक (like fractions) म्हणतात.

म्हणजे  $\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{3}{15}, \frac{8}{15}$  हे सर्व समच्छेदी अपूर्णांक आहेत.

$\frac{7}{27}$  आणि  $\frac{7}{28}$  हे समच्छेदी आहोत का? यांचे छेद समान नाहीत. हे असमच्छेदी अपूर्णांक

( unlike fractions ) आहेत.

असमच्छेदी अपूर्णांकांच्या पाच जोड्या लिहा.

## 7.9 अपूर्णांकांची तुलना

सोहनीच्या ताटात  $3\frac{1}{2}$  पोळ्या होत्या. रीताच्या ताटात  $2\frac{2}{4}$  पोळ्या होत्या. कोणाच्या ताटात जास्त पोळ्या आहेत. सोहनीच्या ताटात 3 पेक्षा अधिक पोळ्या आहेत व रीताच्या ताटात 3 पेक्षा कमी पोळ्या आहेत. म्हणजेच सोहनीच्या ताटात जास्त पोळ्या आहेत.

आता आकृती 7.12 मध्ये दाखविलेले  $\frac{1}{2}$  आणि  $\frac{1}{3}$  या अपूर्णांकांचा विचार करा. एका संपूर्ण भागाचा  $\frac{1}{2}$  शी संबंधित छायांकित भाग आणि त्याच अपूर्णांकाचा शी संबंधित छायांकित भाग



आकृती 7.12

पाहा  $\frac{1}{2}$  चा संबंधित भाग हा पेक्षा अधिक आहे. म्हणजेच  $\frac{1}{2}$  हा पेक्षा मोठा आहे.

सर्वसाधारणपणे कोणता अपूर्णांक मोठा आहे हे सांगणे इतके सोपे नसते. उदा. मोठा आहे की

? यासाठी आपण आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे पाहून सांगू शकतो. (आकृती 7.12). पण आकृत्या काढणे नेहमीच शक्य असते असे नाही. हे विशेषत: छेद 13 असेल तर शक्य नसते. यासाठी आपल्याला अपूर्णांकाची तुलना करण्यासाठी एक पद्धत शोधायला हवी.

यासाठी आपण प्रथम समच्छेदी अपूर्णांकांची तुलना करू.

### प्रयत्न करा



- एका ज्यूसच्या बाटलीतील भाग ज्यूस तुम्हाला व भाग ज्यूस बहिणीला मिळतो. कोणाला

अधिक ज्यूस मिळतो.

### 7.9.1 समच्छेदी अपूर्णकांची तुलना

समान छेद असलेले अपूर्णक समच्छेदी अपूर्णक असतात. खालीलपैकी कोणते अपूर्णक समच्छेदी आहेत?

आपण व या दोन समच्छेदी अपूर्णकांची तुलना करू.



दोन्ही अपूर्णकांत 8 समान भाग केले आहेत व आणि साठी त्यातील अनुक्रमे 3 आणि 5 भाग घेतले. हे स्पष्ट दिसते की 5 भागांच्या संबंधित छायांकित भाग हा 3 भागांच्या छायांकित भागापेक्षा मोठा आहे. म्हणून आहे. लक्षात घ्या की विचारात घेतलेले भाग अंशाशी संबंधित आहेत. म्हणजेच दोन अपूर्णकातील छेद समान असताना ज्याचा अंश मोठा आहे तो अपूर्णक मोठा असतो. आणि मध्ये हा मोठा अपूर्णक आहे. आणि मध्ये हा मोठा आहे.

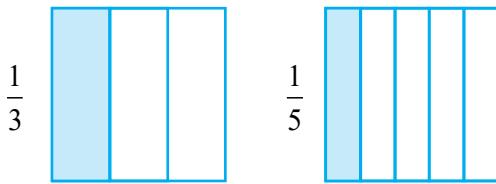
#### प्रयत्न करा

1. कोणता अपूर्णक मोठा आहे?
  - (i) की (ii) की (iii) की
2. खालील अपूर्णक किमतीच्या चढत्या क्रमाने व उतरत्या क्रमाने लिहा.
  - (a)  $\frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}$
  - (b)  $\frac{1}{5}, \frac{11}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{7}{5}$
  - (c)  $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}, \frac{7}{7}$

### 7.9.2 असमच्छेदी अपूर्णकांची तुलना

जर छेद समान नसतील तर ते अपूर्णक असमच्छेदी असतात. उदा. आणि असमच्छेदी अपूर्णक आहेत. आणि असमच्छेदी आहेत.

समान अंश असलेले असमच्छेदी अपूर्णांक



असमच्छेदिक अपूर्णांक आणि विचारात घ्या. यांचे अंश समान आहेत.

मोठा की ?

साठी एका पूर्णाचे 3 भाग करून त्यातील 1 भाग घेतो व साठी एका पूर्णाचे 5 समान भाग करून त्यातील एक घेतो. लक्षात घ्या की साठी पेक्षा कमी भागात विभागणी केली आहे. म्हणून मध्ये मिळालेला भाग मध्ये मिळालेल्या भागाच्यापेक्षा मोठा आहे. यामुळे एका पूर्णाचा दाखविणारा भाग हा दाखविणाऱ्या भागापेक्षा मोठा आहे. म्हणून

$\frac{2}{3}, \frac{21}{30}, \frac{23}{95}, \frac{2}{5}, \frac{32}{77}, \frac{4}{9}, \frac{1}{11}$  यांच्या प्रमाणे आपण म्हणून शकतो की येथे पहिल्याप्रमाणेच स्थिती आहे. फक्त अंश 1 नसून 2 आहे. साठी पेक्षा एका पूर्णाचे जास्त समान भाग करावे लागले. म्हणून मधील प्रत्येक समान भाग हा च्या प्रत्येक समान भागापेक्षा मोठा आहे. आपण समान भागांच्या संख्या बद्धतो. (अंश समान आहे) म्हणून पूर्णाचा दाखविणारा भाग पूर्णाच्या भागापेक्षा मोठा आहे.

म्हणून .

वरील उदाहरणावरून आपण पाहतो की, जर दोन अपूर्णांकांचे अंश समान असतील तर छेद लहान असणारा अपूर्णांक हा मोठा असतो.

याप्रमाणे

याला चढत्या क्रमाने मांडा. हे सर्व असमच्छेदी अपूर्णांक आहेत. पण यांचे अंश समान आहेत. म्हणून ज्याचा छेद मोठा तितका तो अपूर्णांक लहान असेल. चा छेद सर्वात

मोठा आहे म्हणून हा सर्वात लहान आहे. म्हणून क्रमाने पुढील तीन अपूर्णक आहेत.  
 सर्वात मोठा अपूर्णक आहे. (याचा छेद सर्वात लहान आहे.) म्हणून अपूर्णकांचा चढता क्रम असा आहे.

### प्रयत्न करा

1. खालील अपूर्णक किमतीच्या चढत्या व उतरत्या क्रमाने मांडूया.

$$(a) \frac{1}{12}, \frac{1}{23}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{50}, \frac{1}{9}, \frac{1}{17}$$

$$(b) \frac{3}{7}, \frac{3}{11}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{3}{13}, \frac{3}{4}, \frac{3}{17}$$

2. वरील प्रकाराची तीन उदाहरणे तयार करा आणि अपूर्णक चढत्या आणि उतरत्या क्रमाने मांडा.

आपल्याला  $\frac{2}{3}$  आणि  $\frac{3}{4}$  या दोन असमच्छेदी अपूर्णकांची तुलना करावयाची आहे. जेव्हा या दोन अपूर्णकांचे छेद आपण समान करून घेऊ तेव्हाच हे शक्य होईल. जेव्हा छेद समान होतील तेव्हा त्यांच्या अंशांची तुलना करून अपूर्णकांची तुलना करणे अधिक सोपे होते.

पुन्हा एकदा  $\frac{2}{3}$  आणि  $\frac{3}{4}$  या दोन अपूर्णकांचा विचार करू.

$$\text{आता } \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \dots$$

$$\text{याप्रमाणे } \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \dots$$

$\frac{2}{3}$  आणि  $\frac{3}{4}$  यांच्या सममूल्य अपूर्णकांमध्ये 12 हा छेद असलेले हे आहेत.

$$\text{अर्थात } \frac{2}{3} = \frac{8}{12} \text{ आहे, आणि } \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \text{ आहे.}$$

$$\text{आहे म्हणून } \frac{3}{4} > \frac{2}{3} \text{ आहे.}$$

**उदाहरण 6 :** आणि यांची तुलना करा.

**उत्तर :** हे असमच्छेदी अपूर्णक आहेत. यांचे अंशाही वेगवेगळे आहेत. यांचे सममूल्य अपूर्णक लिहू.

यातील समान छेद असलेले सममूल्य

$$\text{आणि } \frac{5}{6} = \frac{25}{30} \text{ आहेत.}$$

$$\frac{25}{30} > \frac{24}{30} \text{ आहे म्हणून } \frac{5}{6} > \frac{4}{5} \text{ आहे.}$$

लक्षात घ्या की सममूल्य अपूर्णांकांचा छेद 30 आहे. हा  $5 \times 6$  आहे. हा 5

आणि 6 चा एक सामाईक गुणक आहे.

जेव्हा दोन असमच्छेदी अपूर्णांकांची तुलना करावयाची असते. तेव्हा आपल्याला दोघांचे असे सममूल्य अपूर्णांक शोधावे लागतात की ज्यामध्ये त्यांच्या छेदांचा सामाईक गुणक असेल.

**उदाहरण 7 :** आणि यांची तुलना करा.

**उत्तर :** हे असमच्छेदी अपूर्णांक आहेत. आपल्याला 6 आणि 15 यांचे सामाईक गुणक असलेले सममूल्य अपूर्णांक शोधावे लागतील.

$$\frac{3 \times 524}{5 \times 530} = \frac{25}{30}, \frac{13 \times 2}{15 \times 2} = \frac{26}{30} \text{ आता } \frac{26}{30} > \frac{25}{30} \text{ आहे म्हणून } \frac{13}{15} > \frac{5}{6} \text{ आहे.}$$

$$\frac{26}{30} > \frac{25}{30} \text{ आहे म्हणून } \frac{13}{15} > \frac{5}{6} \text{ आहे.}$$

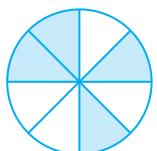
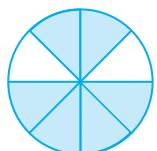
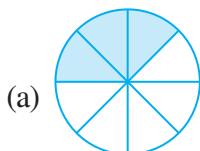
**ल.सा.वि. का?**

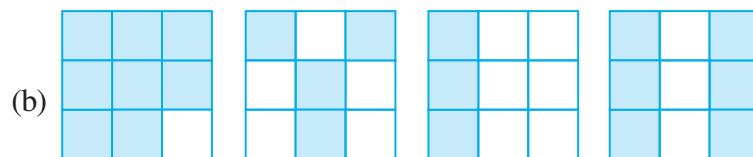
6 आणि 15 चा गुणाकार 90 आहे. म्हणजेच 90 हा 6 आणि 15 चा एक सामाईक गुणक आहे. आपण 30 ऐवजी 90 ही वापरू शकतो. परंतु लहान संख्यांचा वापर करणे अधिक सोयीचे व सुलभ असते. यामुळे सर्व सामाईक गुणकातील सर्वात छोटा सामाईक गुणक घ्यायला हावा. म्हणून छेद समान करण्यासाठी ल.सा.वि.ला प्राधान्य दिले जाते.



#### उदाहरणसंग्रह 7.4

- खालील प्रत्येक चित्रासाठी अपूर्णांक लिहा. त्यामध्ये ' $<$ ', ' $=$ ', ' $>$ ' यापैकी योग्य चिन्हे वापरून अपूर्णांक किमतीच्या चढत्या व उतरत्या क्रमाने लिहा.





(c)  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{8}{6}$  आणि  $\frac{6}{6}$  हे संख्यारेषेवर दाखवा.

दिलेल्या अपूर्णकांमध्ये ' $<$ ', ' $>$ ' यापैकी योग्य चिन्ह लिहा.

$$\frac{5}{6} \quad \frac{2}{6}, \quad \frac{3}{6} \boxed{\phantom{0}}, \quad ,$$

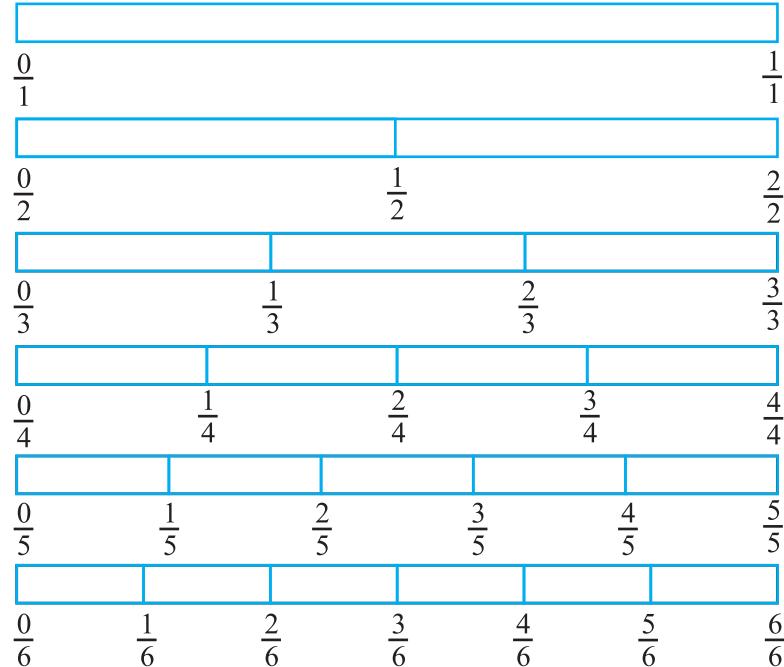
2. अपूर्णकांची तुलना करून योग्य चिन्ह लिहा.

(a) (b)

(c) (d)

3. अपूर्णकांच्या अशा 5 जोड्या लिहून योग्य चिन्ह लिहा.

4. खालील आकृती पाहा आणि अपूर्णकांमध्ये ' $>$ ', ' $=$ ', ' $<$ ' यापैकी योग्य चिन्ह लिहा.



(a) (b) (c)

(d) (e)

असेच पाच प्रश्न आणखी तयार करा आणि मित्रांबरोबर सोडवा.

5. किती लवकर करता पाहूया! योग्य चिन्ह लिहा. ( $<$ ,  $=$ ,  $>$ )

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

(g)

(h)

(i)

(j)

6. खालील अपूर्णांक वेगवेगळ्या संख्या दर्शवितात. त्यांना सरळरूप देऊन सममूल्य अपूर्णांकांचे गट तयार करा.

(a)  $\frac{2}{12}$

(b)  $\frac{3}{15}$

(c)  $\frac{8}{50}$

(d)  $\frac{16}{100}$

(e)  $\frac{10}{60}$

(f)  $\frac{15}{75}$

(g)  $\frac{12}{60}$

(h)  $\frac{16}{96}$

(i)  $\frac{12}{75}$

(j)  $\frac{12}{72}$

(k)  $\frac{3}{18}$

(l)  $\frac{4}{25}$

7. खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा व ती कशी आली ते लिहा.

(a)  $\frac{5}{9}, \frac{4}{5}$  सममूल्य आहेत का? (b)  $\frac{9}{16}, \frac{5}{9}$  सममूल्य आहेत का?

(c)  $\frac{4}{5}, \frac{16}{20}$  सममूल्य आहेत का? (d)  $\frac{1}{15}, \frac{4}{30}$  सममूल्य आहेत का?

8. एका पुस्तकाच्या 100 पानांपैकी इलाने 25 पाने वाचली. ललिताने या पुस्तकाचा  $\frac{1}{2}$  भाग वाचला. कोणी कमी पाने वाचली?

9. रफिकने 1 तासाच्या  $\frac{3}{6}$  वेळ व्यायाम केला व रोहितने 1 तासाच्या  $\frac{3}{4}$  वेळ व्यायाम केला. कोणी जास्त वेळ व्यायाम केला?

10. 25 विद्यार्थिनींच्या अ या तुकडीतील 20 विद्यार्थिनींनी प्रथम श्रेणी मिळविली. 30 विद्यार्थिनींच्या ब या तुकडीतील 24 विद्यार्थिनींनी प्रथम श्रेणी मिळविली. कोणत्या तुकडीतील विद्यार्थिनींनी एकूणातील अधिक भाग प्रथम श्रेणी मिळविली?

## 7.10 अपूर्णांकांची बेरीज व वजाबाकी

आपण नैसर्गिक संख्या पूर्ण संख्या व पूर्णांक संख्या यांचा अभ्यास केला. आता आपण अपूर्णांकांचा अभ्यास करणार आहोत.

जेव्हा आपण नवीन प्रकारच्या संख्या मिळवितो त्यावेळी त्या संख्यावर क्रिया करता येतात का ते पाहतो. म्हणजे आपण त्यांची बेरीज करू शकतो का? वजाबाकी करू शकतो का? संख्यांच्या बाबतीत आधी पाहिलेले गुणधर्म यांना लागू होतात का? यांच्यासाठी नवीन कोणते गुणधर्म आहेत? या संख्या आपल्या दैनंदिन व्यवहारात कशा उपयुक्त आहेत, असा विचार आपण करतो.

हे उदाहरण पाहा. एक चहाचा दुकानदार दुकानात सकाळी  $2\frac{1}{2}$  लीटर व संध्याकाळी  $1\frac{1}{2}$  लीटर

दुधाचा वापर करतो. तर तो दिवसभरात किती दुधाचा वापर करतो?

शेखरने दुपारी 2 पोळ्या खालल्या व रात्री  $1\frac{1}{2}$  पोळी खालली, तर त्याने एकूण किती पोळ्या खालल्या.

या दोन्ही उदाहरणात अपूर्णांकांची बेरीज करायला लागेल. यापैकी काही बेरजा आपण तोंडी व सहज करू शकतो.

### प्रयत्न करा

- आईने सफरचंदाचे चार समान भाग केले. तिने मला 2 भाग व माझ्या भावाला एक भाग दिला, तर आम्हा दोघांना मिळून कितवा भाग दिला?
- आईने नीलू आणि तिच्या भावाला गहू निवडायला सांगितले. नीलूने एकूणपैकी गहू निवडले व भावाने एकूणपैकी गहू निवडले. दोघांनी मिळून एकूणपैकी किती भाग गहू निवडले.
- सोहन आपल्या वह्यांना कव्हर घालत होता. सोमवारी त्याने वह्यांनी कव्हरे घातली व मंगळवारी आणखी वह्यांना कव्हरे घातली व उरलेली कव्हरे बुधवारी घातली. बुधवारी त्याने एकूणपैकी किती भाग वह्यांना कव्हरे घातली?

### हे करा

आपल्या मित्रांच्या साहाय्याने असे 10 प्रश्न तयार करा व सोडवा.

#### 7.10.1 समच्छेद अपूर्णांकांची बेरीज व वजाबाकी

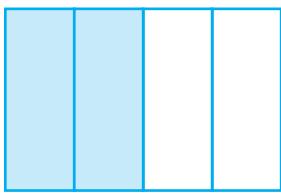
सर्व अपूर्णांकांची बेरीज तोंडी करता येत नाही. वेगवेगळ्या परिस्थितीत ही बेरीज कशी करायची ते पाहू. हे शिकण्याची आवश्यकता आहे. आपण समच्छेद अपूर्णांकांपासून सुरुवात करू.

$7 \times 4$  मापाचा एक आखीव चौकडीचा कागद घ्या. (आकृती 7.13). या कागदात प्रत्येक ओळीत 7 चौकोन आहेत व प्रत्येक स्तंभात 4 चौकोन आहेत.

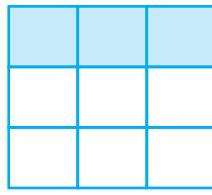
यामध्ये एकूण चौकोन किती आहेत? यातील 5 चौकोनांमध्ये हिरवा रंग भरा. हिरव्या रंगाने एकूणपैकी किती भाग भरला आहे. आता उरलेल्यापैकी 4 चौकोनांमध्ये पिवळा रंग भरा. पिवळ्या रंगाने एकूणपैकी किती भाग रंग भरला आहे? एकूणपैकी किती भाग रंगाने भरला आहे? यावरून  $\frac{5}{28} + \frac{4}{28} = \frac{9}{28}$  आहे हे दिसते आहे.

आणखी उदाहरण पाहा :

आकृती 7.14 (i) मध्ये आकृतीचा दोन चतुर्थांश भाग छायांकित आहे, याचा अर्थ 4 पैकी दोन भाग किंवा आकृतीचा  $\frac{1}{2}$  भाग छायांकित आहे.



आकृती 7.14 (i)



आकृती 7.14 (ii)

$$\text{अर्थात } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ आहे.}$$

आकृती 7.14 (ii) पाहा.

$$\text{आकृती 7.14 (ii)} \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1+1+1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ दाखविते.}$$

आपण या उदाहरणावरून काय शिकलो? दोन वा अधिक समच्छेद अपूर्णांकांची बेरीज खालीलप्रमाणे करतात.

**पायरी 1** अंशांची बेरीज करा.

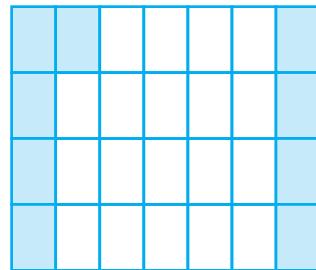
**पायरी 2** (दोन अथवा सर्व) छेद तसेच ठेवा.

**पायरी 3** उत्तर खालीलप्रमाणे लिहा. 
$$\frac{\text{पायरी 1 चे उत्तर}}{\text{पायरी 2 चे उत्तर}}$$

आता याप्रमाणे  $\frac{3}{5}$  आणि  $\frac{1}{5}$  यांची बेरीज करा.

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$$

आता  $\frac{7}{12}$  व  $\frac{3}{12}$  यांची बेरीज करा.



आकृती 7.13

### प्रयत्न करा

1. आकृतीच्या साहाय्याने बेरीज करा.

$$(i) \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \quad (ii) \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \quad (iii) \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$$

2. या बेरजेचे उत्तर काय?

चित्राच्या साहाय्याने कसे दाखवाल? कागदाच्या घड्या घालून हे कसे दाखवाल?

3. प्रश्न 1 व 2 प्रमाणे 5 प्रश्न तयार करा.

आपल्या मित्रांच्या साहाय्याने ते सोडवा.

### वजाबाबकीचा अभ्यास

शर्मिलाजवळ केकचा  $\frac{5}{6}$  भाग होता. तिने केकचा  $\frac{2}{6}$  भाग आपल्या छोट्या भावाला दिला. तिच्याजवळ किती भाग राहिला?

एका आकृतीच्या साहाय्याने हे सोप्या रीतीने पाहता येईल. लक्षात घ्या की येथे समच्छेद अपूर्णांक आहेत. (आकृती 7.15).



आकृती 7.15

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6} \text{ म्हणजे } \frac{1}{2} \text{ हे उत्तर मिळते.}$$

(हे समच्छेद अपूर्णांकांच्या बेरीज करण्याप्रमाणेच आहे ना?)

आपण समच्छेद अपूर्णांकांमधील फरक खालीलप्रमाणे काढतो.

**पायरी 1** मोठ्या अंशातून छोटा अंश वजा करा.

**पायरी 2** छेद तसाच ठेवा.

**पायरी 3** अपूर्णांक असा लिहा 

पायरी 1 चे उत्तर	पायरी 2 चे उत्तर
------------------	------------------

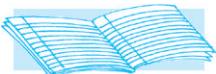
 आपण  $\frac{3}{10}$  मधून  $\frac{8}{10}$  वजा करू शकू का?

### प्रयत्न करा

1. आणि यांतील फरक काढा.

2. आईने पुरणाच्या एका पोळीचे पाच समान भाग केले. सीमाने त्यातील एक भाग खाल्ला. मी आणखी एक भाग खाल्ला तर पोळीचा किती भाग शिल्लक राहिला?

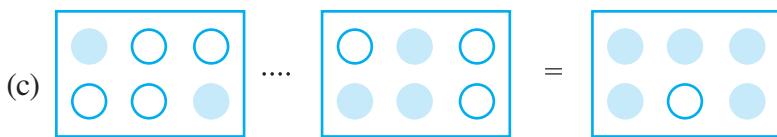
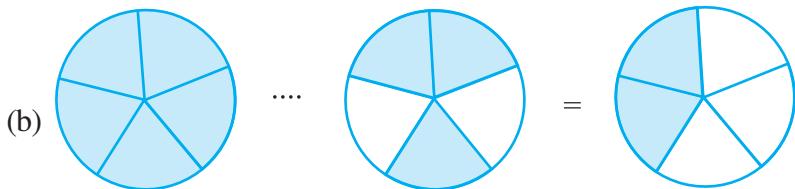
3. माझ्या मोठ्या बहिणीने टरबुजाचे 16 समान भाग केले. मी त्यातील 7 तुकडे खाल्ले. माझ्या मित्राने 4 तुकडे खाल्ले. आम्ही दोघांनी मिळून किती टरबुज खाल्ले? मी आपल्या मित्रापेक्षा किती जास्त टरबुज खाल्ले? किती टरबुज शिल्लक राहिले?
4. अशा प्रकारचे पाच प्रश्न तयार करा व मित्रांच्या साहाय्याने सोडवा.



### सराव 7.5

1. खालील अपूर्णांकांची बेरीज व वजाबाकी करून लिहा.

(a) .... =



$\frac{13}{57} + \frac{312}{622}$ . सोडवा.

(a)  $\frac{1}{18} + \frac{1}{18}$       (b)  $\frac{8}{15} + \frac{3}{15}$       (c)  $\frac{7}{7} - \frac{5}{7}$

(d)  $\frac{1}{22} + \frac{21}{22}$       (e)  $\frac{12}{15} - \frac{7}{15}$   
 (f)  $\frac{5}{8} + \frac{3}{8}$       (g)  $1 - \frac{2}{3} \left( 1 = \frac{3}{3} \right)$

(h)  $\frac{1}{4} + \frac{0}{4}$       (i)

3. शुभमने आपल्या खोलीच्या भिंतीवर  $\frac{2}{3}$  भागावर चित्र काढले. त्याची बहीण माधवी हिने त्याला मदत म्हणून भिंतीचा  $\frac{1}{3}$  भाग रंगविला. दोघांनी मिळून एकूण किती भाग रंगवला?

4. रिकाम्या जागा भरा.

(a)  $\frac{7}{10} - \square = \frac{3}{10}$       (b)  $\square - \frac{3}{21} = \frac{5}{21}$

(c)      (d)

5. जावेदला संत्र्यांच्या टोपलीतील  $\frac{5}{7}$  संत्री मिळाली. टोपलीमध्ये किती भाग संत्री शिल्लक राहिली?

### 7.10.2 अपूर्णकांची बेरीज व वजाबाकी

आपण समच्छेद अपूर्णकांची बेरीज व वजाबाकी शिकलो. ज्या अपूर्णकांचे छेद समान नाहीत त्यांची बेरीज व वजाबाकी करणेही फारसे अवघड नाही. जेव्हा आपल्याला दोन अपूर्णकांची बेरीज अथवा वजाबाकी करायची आहे तर दोन अपूर्णकांचे छेद समान येतील असे बदलून घेणे आवश्यक आहे व नंतर पुढे क्रिया करायला हवी.

मध्ये किती मिळविले की  $\frac{1}{2}$  मिळतात? याचा अर्थ इच्छित संख्या मिळविण्यासाठी  $\frac{1}{2}$  मधून

वजा करायला हवेत.

व  $\frac{1}{2}$  हे असमच्छेदिक अपूर्णक आहेत. यांची वजाबाकी करण्यास प्रथम समान छेद येतील असे ते बदलावे लागतील.  $\frac{1}{2}$  व यांचे समान छेद असलेले अपूर्णक अनुक्रमे  $\frac{5}{10}$  आणि  $\frac{2}{10}$  आहेत.

कारण  $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$  आणि  $\frac{1}{5} = \frac{1 \times 2}{5 \times 2} = \frac{2}{10}$  आहे.

म्हणून

**उदाहरण 8 :** मधून वजा करा.

**उकल :** आपल्याला समान छेद असलेले आणि चे सममूल्य अपूर्णक तयार करावे लागतील. येथे छेद 4 आणि 6 चा ल.सा.वि. 12 आहे.

म्हणून

**उदाहरण 9 :** आणि ची बेरीज करा.

**उकल :** 5 आणि 3 चा ल.सा.वि. 15 आहे.

म्हणून

**उदाहरण 10 :** सोडवा.  $\frac{3}{5} - \frac{7}{20}$

**उकल :** 5 आणि 20 चा ल.सा.वि. 20 आहे.

$$\text{म्हणून } \frac{3}{5} - \frac{7}{20} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} - \frac{7}{20} = \frac{12}{20} - \frac{7}{20} \\ = \frac{12 - 7}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

### प्रयत्न करा

1.  $\frac{2}{5}$  आणि  $\frac{3}{7}$  यांची बेरीज करा.
2.  $\frac{5}{7}$  मधून  $\frac{2}{5}$  वजा करा.

आपण मिश्र अपूर्णांकांची बेरीज अथवा वजाबाकी कशी करतो?

मिश्र अपूर्णांक हा एक पूर्णांक व एक छेदाधिक अपूर्णांक यांच्या बेरजेच्या रूपात किंवा एका अंशाधिक अपूर्णांकाच्या रूपात लिहिता येतो. मिश्र अपूर्णांकांची बेरीज अथवा वजाबाकी करताना त्यांचे पूर्णांक आणि अपूर्णांक यांवर वेगवेगळ्या क्रिया करतात किंवा पहिल्यांदा मिश्र अपूर्णांक हे अंशाधिक अपूर्णांकांच्या रूपात लिहितात आणि मग बेरीज अथवा वजाबाकी करतात.

**उदाहरण 11 :**  $2\frac{4}{5}$  आणि  $3\frac{5}{6}$  यांची बेरीज करा.

$$\begin{array}{r} 4 \ 19 \ 25 \ 9 \ 40 \\ + 1 \ 13 \ 0 \ 0 \\ \hline 5 \ 30 \ 38 \ 0 \ 30 \end{array} \text{उकल} \quad \frac{5 \times 5}{6 \times 5} : 2\frac{4}{5} + 3\frac{5}{6} = 2 + \frac{4}{5} + 3 + \frac{5}{6} = 5 + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}.$$

आता

(कारण 5 आणि 6 चा ल.सा.वि. 30)

$$= \frac{30 + 19}{30}$$

=

$$\text{म्हणून } 5 + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} =$$

$$= 6 + \frac{19}{30} = 6\frac{19}{30}$$

$$\text{म्हणून } = 6\frac{19}{30}$$

विचार करा, चर्चा करा आणि लिहा

आपण याची उकल काढण्यासाठी दुसऱ्या प्रकारे विचार करू शकतो का?

**उदाहरण 12 :** सोडवा

**उकल** : पूर्णांक 4 आणि 2 तसेच अपूर्णांक आणि यांची वेगळी वजाबाकी करता येते.

लक्षात घ्या  $4 > 2$  आहे आणि  $\frac{2}{5} > \frac{1}{5}$  आहे.

$$\text{म्हणून } 4\frac{2}{5} - 2\frac{1}{5} = (4 - 2) + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) = 2 + \frac{1}{5} = 2\frac{1}{5}$$

**उदाहरण 13** : सोडवा.  $8\frac{1}{4} - 2\frac{5}{6}$

**उकल** : येथे  $8 > 2$  आणि  $\frac{1}{4} < \frac{5}{6}$  आहे. आपण याची उकल खालीलप्रमाणे करू शकतो.

$$8\frac{1}{4} = \frac{(8 \times 4) + 1}{4} = \frac{33}{4} \quad \text{असे} \quad 2\frac{5}{6} = \frac{2 \times 6 + 5}{6} = \frac{17}{6}$$

आता

$$\begin{aligned} \frac{33}{4} - \frac{17}{6} &= \frac{33 \times 3}{12} - \frac{17 \times 2}{12} \quad (\text{कारण 4 आणि 6 चा ल. सा. वी. 12 आहे}) \\ &= \frac{99 - 34}{12} - \frac{65}{12} = 5\frac{5}{12} \end{aligned}$$



## प्रश्नसंग्रह 7.6

1. सोडवा.

$$(a) \frac{2}{3} + \frac{1}{7} \quad (b) \frac{3}{10} + \frac{7}{15} \quad (c) \frac{4}{9} + \frac{2}{7} \quad (d) \frac{5}{7} + \frac{1}{3}$$

$$(e) \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \quad (f) \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \quad (g) \frac{3}{4} \int \frac{1}{3} \quad (h) \frac{5}{6} \int \frac{1}{3}$$

$$(i) \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \quad (j) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \quad (k) 1\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3} \quad (l) 4\frac{2}{3} + 3\frac{1}{4}$$

$$(m) \frac{16}{5} \int \frac{7}{5} \quad (n) \frac{4}{3} \int \frac{1}{2}$$

2. सरिताने  $\frac{2}{5}$  मी. रिबिन खरेदी केली व ललिताने  $\frac{3}{4}$  मी. रिबिन खरेदी केली. दोघीनी मिळून एकूण किती रिबिन खरेदी केली.

3. नैनाला  $1\frac{1}{2}$  केक अणि नजमाला  $1\frac{1}{3}$  केक मिळाले. दोघींना मिळून किती केक मिळाले?
4. रिकाम्या जागा भरा. (a)  $\square - \frac{5}{8} = \frac{1}{4}$  (b)  $\square - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$  (c)  $\frac{1}{2} - \square = \frac{1}{6}$
5. बेरजेचे व वजाबाकीचे कोष्टक पूर्ण करा.

(a)

$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

(b)

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	

6.  $\frac{7}{8}$  मी. लांबीच्या तारेचे दोन तुकडे होतात. एका तुकड्याची लांबी  $\frac{1}{4}$  मी. आहे तर दुसऱ्या तुकड्याची लांबी किती?
7. नंदिनीचे घर तिच्या शाळेपासून  $\frac{9}{10}$  किमी अंतरावर आहे. ती काही अंतर चालत जाते व  $\frac{1}{2}$  अंतर बसने जाऊन शाळेत पोहोचते तर ती किती अंतर चालत जाते?
8. आशा आणि सॅम्युअलकडे पुस्तके ठेवण्याची एकाच मापाची कपाटे आहेत. आशाच्या कपाटात  $\frac{5}{6}$  भाग पुस्तके आहेत तर सॅम्युअलच्या कपाटात  $\frac{2}{5}$  भाग पुस्तके आहेत. कोणाचे कपाट किती जास्त पुस्तकांनी भरले आहे. 
9. शाळेच्या मैदानाला फेरी मारण्यास जयदेवला  $2\frac{1}{5}$  मिनिट लागते. राहुलला अशीच फेरी मारण्यास  $\frac{7}{4}$  मिनिटे लागतात. दोघांपैकी कोण कमी वेळात फेरी मारतो व किती कमी वेळात?

### आपण काय शिकलो

1. (a) अपूर्णांक संख्या म्हणजे एका पूर्णाचा किती भाग ते दाखविते व संख्यारेषेवर बिंदूच्या साहाय्याने दाखविता येते. एक पूर्ण म्हणजे एक वस्तू अगर वस्तूंचा समूह असू शकतो.
- (b) मोजलेल्या भागांना अपूर्णांकांच्या रूपात दाखविण्यासाठी सर्व भाग समान असणे आवश्यक आहे.

2. मध्ये 5 हा अपूर्णांकाचा अंश व 7 हा छेद असतो.
3. अपूर्णांक हा संख्यारेषेवर दाखविता येतो. प्रत्येक अपूर्णांक म्हणजे संख्यारेषेवरील एक निश्चित बिंदू असतो.
4. छेदाधिक अपूर्णांकांत अंश हा छेदापेक्षा मोठा असतो आणि अंशाधिक अपूर्णांकात छेद हा अंशापेक्षा लहान असतो. अंशाधिक अपूर्णांक हा पूर्ण भाग आणि कितवा भाग या स्वरूपात दाखविता येतो. या स्वरूपात याला मिश्र अपूर्णांक म्हणतात.
5. दोन अपूर्णांक एकच संख्या दाखवित असतील तर त्यांना सममूल्य अपूर्णांक म्हणतात. प्रत्येक अंशाधिक अर्थवा छेदाधिक अपूर्णांकास सममूल्य असतोच. एका दिलेल्या अपूर्णांकाच्या अंश व छेदास एकाच शून्येतर संख्येने गुणल्यास अर्थवा भागल्यास आपल्याला सममूल्य अपूर्णांक मिळतो.
6. ज्या अपूर्णांकात अंश व छेद यांच्यामध्ये एक शिवाय अन्य गुणक नसेल तर त्याला अपूर्णांकाचे सरळरूप म्हणतात.