बीजगणित

प्रकरण 11

11.1 प्रस्तावना

आतापर्यंत आपला बहुतेक अभ्यास संख्या आणि आकृत्यांविषयी झाला आहे. आपण या संख्या, संख्यांवरील क्रिया आणि त्यांचे गुणधर्म यांविषयी शिकलो आहोत. आपण संख्यांचा वापर दैनंदिन जीवनातील अनेक समस्या सोडवताना केला आहे. गणिताचे असे क्षेत्र ज्याचा आपण अभ्यास केला आहे, त्याला **अंकगणित (arithmetic)** म्हटले जाते. आपण दोन आणि तीन मिती (dimensions) असलेल्या आकृत्या आणि त्यांचे गुणधर्म याविषयी शिकलो आहोत. आकृती किंवा आकार **(Shapes)** यांच्याविषयी अभ्यास करणाऱ्या क्षेत्राला **भूमिती (geometry)** म्हणतात. आता आपण गणिताचे जे क्षेत्र अभ्यासणार आहोत; त्याला **बीजगणित (Algebra)** म्हणतात.

या नवीन क्षेत्राचे मुख्य वैशिष्ट्य असे आहे की यामध्ये अक्षरांचा वापर केला जातो. अक्षरांचा वापर करून नियम आणि सूत्रे अधिक विस्तृत स्वरूपात लिहिणे शक्य होते. अक्षरांचा वापर केल्यामुळे आपण केवळ एक संख्या नव्हे तर एका राशीबद्दल बोलू शकतो. दुसरे असे की अक्षरे माहीत नसलेल्या राशींच्या जागी देखील वापरता येतात. या अज्ञात राशींना (unknowns) निश्चित करण्याच्या पद्धती शिकून आपण कोडी (puzzles) तसेच दैनंदिन जीवनातील अनेक गोष्टी सोडवण्यासाठी प्रभावशाली साधन शोधू शकतो. तिसरी गोष्ट म्हणजे ही अक्षरे संख्यांच्या जागी वापरली जातात. त्यामुळे यांच्यावर संख्यांप्रमाणेच विविध क्रिया करता येतात. यातून आपण बैजिक मांडणी (algebric expressions) आणि त्यांचे गुणधर्म यांचा अभ्यास करू शकतो.

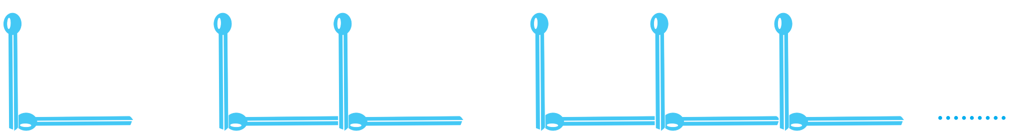
तुम्हांला बीजगणित हे खूपच मजेशीर आणि उपयुक्त वाटेल. समस्या सोडवण्यासाठी हे खूपच उपयुक्त आहे. चला, आपला अभ्यास सोप्या उदाहरणांमधून सुरू करू.

11.2 काडीपेटीच्या काड्यांनी बनले आकृतिबंध

अमीना आणि सरिता काडीपेटीच्या काड्यांपासून आकृतीबंध (pattern) बनवत आहेत. त्यांनी इंग्रजी वर्णमालेच्या अक्षरांचा सोपा आकृतिबंध बनवायचे ठरवले. आकृती 11.1 (a) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे अमीनाने दोन काड्या घेऊन L हे अक्षर बनवले. मग, आकृती 11.1 (b) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे सरीताने आणखी एक L अमीनाने बनवलेल्या L च्यापुढे ठेवला.

मग अमीना, आणखी एक L बनवून पुढे ठेवते. असाच क्रम पुढे चालू राहतो. आकृती 11.1 (c) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे–

तेवढ्यात त्यांचा मित्र अप्पू येतो. तो पण या पॅटर्नकडे पाहतो. तो सतत प्रश्न विचारत असतो. तो



(a) (b) (c)

आकृती 11.1

मुलींना विचारतो. 'सात' L बनवण्यासाठी किती काड्या लागतील? अमीना आणि सरिता विचारपूर्वक काम करतात. त्यांनी 1L, 2L, 3L याप्रमाणे पॅटर्न बनवून तक्ता तयार कलेला.

सारणी–1

बनवलेल्या L ची संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	_	_
आवश्यक काड्यांची संख्या	2	4	6	8	10	12	14	16	_	_

अप्पूला तक्ता–1 द्वारे उत्तर मिळते. 7 L बनवण्यासाठी 14 काड्या लागतील.

तक्ता लिहिताना अमीनाच्या लक्षात येते, की आवश्यक काड्यांची संख्या L च्या दुप्पट आहे म्हणजे,

आवश्यक काड्यांची संख्या $= 2 \times$ L ची संख्या

चला, सोईसाठी L च्या संख्येसाठी n हे अक्षर मानू.

जर एक L बनवला तर $n = 1$ आहे जर 2L बनवले तर $n = 2$ इ. अशा प्रकारे n म्हणजे कोणतीही नैसर्गिक संख्या 1, 2, 3, 4, 5, ... होऊ शकते. मग आपण लिहूया.

आवश्यक संख्यांची संख्या $= 2 \times n$

$2 \times n$ लिहिण्याऐवजी आपण $2n$ लिहूया. लक्षात घ्या $2n$ म्हणजेच $2 \times n$ आहे.

अमीना तिच्या मित्रांना सांगते की, तिचा हा नियम कितीही L बनवण्यासाठी लागणाऱ्या काड्यांची संख्या सांगू शकतो.

अशा प्रकारे, $n = 1$ असल्यास आवश्यक काड्यांची संख्या $= 2 \times 1 = 2$;

$n = 2$ असल्यास आवश्यक काड्यांची संख्या $= 2 \times 2 = 4$;

$n = 3$ असल्यास आवश्यक काड्यांची संख्या $= 2 \times 3 = 6$ इत्यादी.

या संख्या तक्ता–1 मध्ये दिलेल्या संख्यांप्रमाणेच आहेत.

सरिता म्हणते, ''हा नियम खूपच प्रभावशाली आहे. या नियमाचा वापर करून मी 100 L बनवायला लागलेल्या काड्यांची संख्या सांगू शकते. एकदा नियम कळाला की, आकृतिबंध आखण्याची किंवा तक्ता बनवण्याची गरज नाही.''

काय तुम्ही सरिताच्या मताशी सहमत आहात काय?

11.3 चलाचा संबोध

वरच्या उदाहरणामध्ये, आपण L चा एक पॅटर्न बनवताना लागलेल्या काड्यांची संख्या काढण्यासाठी एक नियम शोधला होता. तो नियम म्हणजे:

आवश्यक काड्यांची संख्या $= 2n$

येथे n, L च्या आकृतिबंधाची संख्या आहे आणि n ला 1, 2, 3, 4, ... या किमती असू शकतात. तक्ता–1 परत पाहूया. सारणीमध्ये n ची किंमत बदलत जाते (वाढते). त्यामुळे आवश्यक काड्यांची संख्यादेखील बदलत जाते (वाढते).

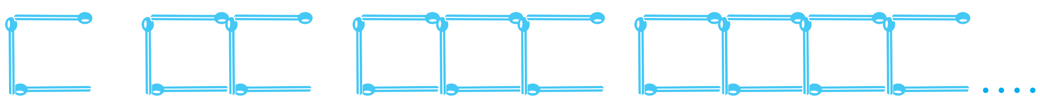
n चल (Variable) चे एक उदाहरण आहे. याची किंमत स्थिर (fixed) नाही. कोणतीही किंमत 1, 2, 3, 4, ... घेऊ शकतो. आपण आवश्यक काड्यांची संख्या काढण्यासाठी चल n चा वापर करून नियम लिहिला.

'चल' या शब्दाचा अर्थ आहे. जी वस्तू सतत बदलत असते. जिची किंमत स्थिर नाही, हा विविध किंमती धारण करू शकतो.

आपण 'चल' च्या बाबतीत आणखी शिकण्यासाठी काडीपेटीच्या काड्यांपासून बनवलेले आणखी काही आकृतिबंध (patterns) पाहूया.

11.4 काडेपेटीच्या काड्यांपासून आणखी काही आकृतिबंध

अमीना आणि सरिता काड्यांचे आकृतिबंध तयार करण्यात आता रस दाखवू लागल्या आहेत. आता त्यांनी C या अक्षराचा आकृतिबंध तयार करण्याचा प्रयत्न केला. एक C बनवायला त्या तीन काड्या वापरतात. आकृती 11.2(a) पाहा.



(a) (b) (c) (d)

आकृती 11.2

तक्ता-2, C चा पॅटर्न बनवायला आवश्यक काड्यांची संख्या दाखवतो:

तक्ता-2

C ची संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	....	....	....
आवश्यक काड्यांची संख्या	3	6	9	12	15	18	21	24	....	....	....

वरील तक्त्यामधील राहिलेल्या संख्या पूर्ण करू शकता का?

सरिताने पुढील नियम दिला:

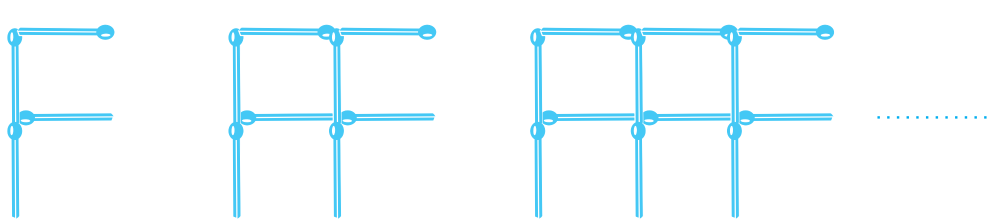
आवश्यक काड्यांची संख्या = $3n$

तिने C च्या संख्येसाठी n हे अक्षर वापरले आहे; n एक चल आहे जे 1, 2, 3, 4, ... इ. किंमत घेऊ शकते.

तुम्ही सरिताशी सहमत आहात का?

लक्षात ठेवा की $3n$ म्हणजेच $3 \times n$

आता यानंतर अमीना आणि सरिता यांना F चा पॅटर्न बनवायचा आहे. त्यांनी चार काड्या वापरून F बनवला. आकृती 11.3(a) पाहा.



(a) (b) (c)

आकृती 11.3

F चा पॅटर्न तयार करण्यासाठी आता तुम्ही नियम लिहू शकाल का?

काड्यांनी तयार करता येतील अशी वर्णमालेतील इतर अक्षरे आणि आकारांचा विचार करा. उदाहरणार्थ, U (⊔), V (\/), त्रिकोण (△), चौरस (□) इ. यांपैकी कोणतीही पाच अक्षरे

किंवा आकार घ्या आणि काड्यांचे आकृतिबंध तयार करायला लागणाऱ्या काड्यांची संख्या काढण्यासाठी नियम लिहा.

11.5 चलांची आणखी उदाहरणे

आपण एक चल दाखवण्यासाठी n हे अक्षर वापरले. राजू विचारतो, "m का नाही?" n मध्ये काही विशेष नाही. कोणतेही अक्षर घेतले तरी चालते.

चल दाखवण्यासाठी m, l, p, x, y, z अशी कोणतीही अक्षरे वापरली तरी चालतात. लक्षात ठेवा, चल अशी संख्या आहे, जिची संख्या स्थिर नाही. उदा. 5 असो किंवा 100 किंवा इतर कोणतीही संख्या चल नाही. त्यांची किंमत स्थिर (निश्चित) आहे. अशाच प्रकारे त्रिकोणाच्या कोनांची संख्या किंमतीने स्थिर म्हणजे 3 आहे. ही चल नाही. चौकोनाच्या कोनांची संख्या (4) स्थिर आहे. तीपण चल नाही. परंतु वरील उदाहरणांमध्ये n ही चल आहे. त्याला 1, 2, 3, 4, ... अशा वेगवेगळ्या किंमती असू शकतात.

आता आणखी एका परिस्थितीमध्ये चलांचा विचार करू.

शाळेच्या पुस्तक भांडारामधून विद्यार्थी स्वाध्यायपुस्तिका घ्यायला गेले. एका स्वाध्याय पुस्तिकेची किंमत 5 रु. आहे. मुन्नूला 5, अप्पूला 7, साराला 4 स्वाध्याय पुस्तिका खरेदी करायच्या आहेत. एका विद्यार्थ्याला स्वाध्याय पुस्तिका घ्यायला किती रक्कम द्यावी लागेल?

एक विद्यार्थी किती स्वाध्याय पुस्तिका खरेदी करणार आहे. यावर ती रक्कम अवलंबून आहे. विद्यार्थ्यांनी एक तक्ता तयार केला.

तक्ता-3

हव्या असलेल्या स्वाध्याय पुस्तिकांची संख्या	1	2	3	4	5	_ _	m	_ _
एकूण रक्कम (रुपयांत)	5	10	15	20	25	_ _	$5m$	_ _

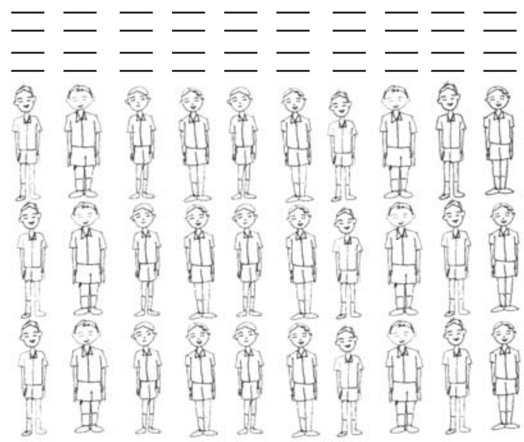
एका विद्यार्थ्याच्या स्वाध्यायपुस्तिकांच्या संख्येसाठी m हे चल वापरले आहे. m हे चल 1, 2, 3, 4, ... अशा कोणतीही किमतीसाठी वापरले जाऊ शकते. m स्वाध्यायपुस्तिकांची एकूण किंमत काढण्यासाठी खालील नियम दिला आहे:

एकूण किंमत (रुपयांमध्ये) = $5 \times$ हवी असलेल्या स्वाध्यायपुस्तिकांची संख्या

$= 5m$

जर मुन्नूला 5 स्वाध्यायपुस्तिका घ्यायच्या असतील तर $m = 5$ अशी किंमत घेऊन मुन्नूला ₹ $5 \times 5 =$ ₹ 25 खरेदी करायला बरोबर न्यावे लागतील.

आणखी एक उदाहरण घेऊ. एका शाळेत प्रजासत्ताक दिन साजरा करण्यासाठी मुले प्रमुख पाहुण्यांसमोर सामुदायिक कवायत करणार आहेत. एका ओळीत 10 मुले (आकृती 11.4) याप्रमाणे मुलांना उभे केले आहे. या कवायतीत किती मुले भाग घेऊ शकतील?



आकृति 11.4

मुलांची संख्या ओळींच्या संख्येवर अवलंबून आहे. जर 1 ओळ असेल तर मुलांची संख्या 10 असेल. जर 2 ओळी असतील तर मुलांची संख्या $2 \times 10 = 20$ असेल, जर r ओळी असतील तर मुलांची संख्या $10r$ असेल. येथे r एक चल आहे. जे ओळींची संख्या दाखवते आणि ही 1, 2, 3, 4, ... अशी कोणतीही किंमत असू शकते.

आतापर्यंत आपण जेवढी उदाहरणे पाहिली त्यामध्ये एक चल आणि एक संख्या यांचा गुणाकार आहे. परंतु विविध परिस्थिती अशा पण असू शकतात. जिथे संख्यांची चलासोबत बेरीज, वजाबाकी दाखवली जाते.

सरिताचे म्हणणे होते की, तिच्याकडे अमीना पेक्षा 10 जास्त मणी आहेत. जर अमीनाकडे 20 मणी आहेत. तर सरिताकडे 30 मणी आहेत. जर अमीनाकडे 30 मणी असतील तर सरिताकडे 40 मणी असतील. आपल्याला हे माहीत नाही की अमीनाकडे नेमके किती मणी आहेत. तिच्याकडील मण्यांची संख्या कितीही असू शकते. परंतु आपल्याला हे ठाऊक आहे की सरिताकडील मणी = अमीनाकडील मणी + 10.

आपण अमीनाकडील मणी x ने दाखवू. x हे एक चल आहे. ज्याची किंमत 1, 2, 3, 4,... ,10,... ,20,... ,30,... अशी कोणतीही असू शकते. x चा वापर करून आपण असे लिहू शकतो की, सरिता कडील मणी = $x + 10$ आहेत. $(x + 10)$ ही राशी, x अधिक (Plus) 10 असे वाचू शकतो. याचा अर्थ असा की, x ची किंमत 20 असेल तर $(x + 10)$ ची किंमत 30 होईल. जर x ची किंमत 30 असेल तर, $(x + 10)$ ची किंमत 40 होईल.

> $(x + 10)$ या राशीला आणखी सोपे करू शकत नाही. $x + 10$ आणि $10x$ यामध्ये गोंधळ करू नका. $10x$ मध्ये x व 10 यांचा गुणाकारआहे तर, $(x + 10)$ मध्ये 10 आणि x यांची बेरीज आहे. याचा पडताळा आपण घेऊया. उदाहरणार्थ,
>
> जर $x = 2$, तर $10x = 10 \times 2 = 20$ आहे आणि $x + 10 = 2 + 10 = 12$ आहे.
>
> जर $x = 10$, तर $10x = 10 \times 10 = 100$ आहे आणि $x + 10 = 10 + 10 = 20$ आहे.

राजू आणि बाळू दोघे भाऊ आहेत. बाळू राजूपेक्षा 3 वर्षांनी लहान आहे. जर राजू 15 वर्षांचा असेल तर बाळू 12 वर्षांचा असेल, आपणास राजूचे वय माहीत नाही ते कितीही असू शकते.

समजा, राजूचे वय x वर्षे आहे. x एक चल आहे आणि बाळूचे वय $(x - 3)$ वर्षे असेल. $(x - 3)$ ही राशी x वजा (minus) 3 अशी वाचता येईल. आता, जर $x = 12$ असेल तर $(x - 3) = 9$ असेल आणि जर $x = 15$ असेल तर $(x - 3) = 12$ असेल.

उदाहरणसंग्रह 11.1

1. काड्यांपासून आकृतिबंध बनवण्यासाठी आवश्यक असलेल्या काड्यांची संख्या काढण्यासाठी नियम तयार करा.
   (a) T या अक्षराचा T या रूपात काड्यांचा आकृतिबंध
   (b) Z या अक्षराचा Z या रूपात काड्यांचा आकृतिबंध
   (c) U या अक्षराचा U या रूपात काड्यांचा आकृतिबंध
   (d) V या अक्षराचा V या रूपात काड्यांचा आकृतिबंध
   (e) E या अक्षराचा E या रूपात काड्यांचा आकृतिबंध
   (f) S या अक्षराचा S या रूपात काड्यांचा आकृतिबंध
   (g) A या अक्षराचा A या रूपात काड्यांचा आकृतिबंध
2. आपण L, C आणि F या अक्षरांच्या आकृतिबंधासाठी लागणारे नियम आधीपासून जाणतो. प्रश्न 1 मध्ये दिलेल्या काही अक्षरांपासून तोच नियम मिळतो का? जो L मधून मिळाला होता. अशी कोणकोणती अक्षरे आहेत? आणि असे का घडते?
3. एका संचलनामध्ये जवानांचे संचलन (Cadets March) चालू आहे. एका ओळीत 5 जवान आहेत. जर ओळींची संख्या माहीत असेल तर जवानांची संख्या काढण्यासाठी कोणता नियम असेल? (ओळींची संख्या n माना.)
4. एका पेटीत 50 आंबे आहेत. तुम्ही पेटींच्या संख्येच्या पटीमध्ये आंब्याची एकूण संख्या कशी लिहाल? (पेटींची संख्या b माना.)
5. शिक्षक प्रत्येक विद्यार्थ्याला 5 पेन्सिली देतात. विद्यार्थ्यांची संख्या माहीत असेल तर तुम्ही हव्या असलेल्या पेन्सिलींची संख्या सांगू शकाल का? (विद्यार्थ्यांची संख्या s माना.)
6. एक चिमणी 1 मिनिटात 1 किमी उडते. तुम्ही चिमणीने पार केलेले अंतर (मिनिटांत) तिला उडण्यासाठी लागलेल्या वेळेच्या पदात मांडू शकाल? (मिनिटांमध्ये उडण्यासाठी लागणारा वेळ t माना.)

7. राधा ठिपक्यांची (Dots) रांगोळी काढत होती. (आकृती 11.5 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे खडूने ठिपके जोडून सुंदर रांगोळी बनवा) तिच्याकडे एका ओळीत 8 ठिपके आहेत. r ओळींच्या रांगोळीत एकूण किती ठिपके असतील? जर 8 ओळी असतील तर ठिपके किती असतील? जर 10 ओळी असतील, तर एकूण ठिपके किती?

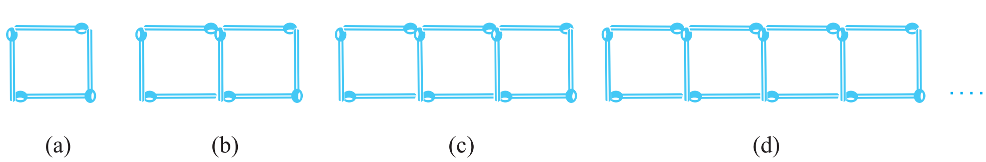
आकृती 11.5

8. लीला राधाची लहान बहीण आहे. लीला राधापेक्षा 4 वर्षांनी लहान आहे. तुम्ही लीलाचे वय राधाच्या वयाच्या संदर्भात पदामध्ये लिहू शकाल का? राधाचे वय x वर्ष आहे.

9. आईने लाडू बनवले आहेत. काही लाडू त्यांनी पाहुणे आणि घरातील सदस्यांना दिले. तरीही 5 लाडू शिल्लक राहिले. जर आईने l लाडू दिले असतील, तर एकूण किती लाडू बनवले होते?

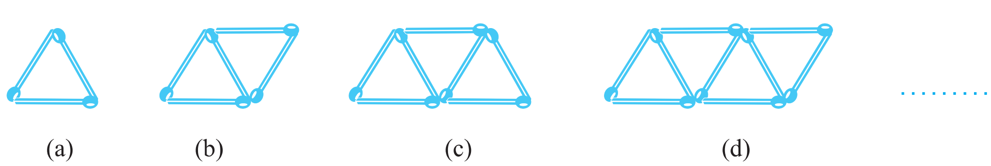
10. मोठ्या खोक्यातील संत्री छोट्या खोक्यांमध्ये ठेवायची आहेत. एका मोठ्या खोक्यातील संत्री दोन लहान खोक्यांत मावतात आणि तरी 10 संत्री शिल्लक राहतात. जर एका छोट्या खोक्यातील संत्र्यांची संख्या x असेल, तर मोठ्या खोक्यातील संत्र्यांची संख्या किती आहे?

11. (a) काड्यांपासून चौरस आकाराचा आकृतिबंध केलेला पाहा (आकृती 11.6) हे चौरस वेगवेगळे नाहीत. दोन लगतच्या चौरसांमध्ये एक काडी सामाईक आहे. चौरस बनवण्यासाठी आवश्यक काड्यांची संख्या काढण्यासाठी आकृतिबंध पाहून नियम तयार करा. (**संकेत:** जर तुम्ही एक काडी काढली तर C चा पॅटर्न मिळेल.)



आकृती 11.6

(b) आकृती 11.7 काड्यांपासून बनवलेला त्रिकोणांचा पॅटर्न दर्शवित आहे. वरील प्रश्न 11 (a) प्रमाणे, विस्तृत नियम शोधा. जो त्रिकोणांची संख्यांच्या पदात आवश्यक काड्यांची संख्या दाखवेल.



आकृती 11.7

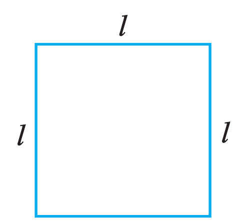
11.6 मूलभूत नियमांमध्ये चलांचा उपयोग

आता असे मूलभूत नियम पाहू जे आपण आधी शिकलो आहोत. जे चलांचा उपयोग करून मांडले जातात.

भूमितीचे नियम

आपण महत्त्वमापन (Mensuration) च्या घटकामध्ये चौरसाची परिमिती, आयतांची परिमिती बद्दल यापूर्वी शिकलो आहोत. आता आपण ते एका नियमाच्या स्वरूपात लिहिण्यासाठी पुन्हा एकदा पाहू.

1. चौरसाची परिमिती: आपल्याला हे ठाऊक आहे की, एक बहुभुजाकृती (3 किंवा त्याहून जास्त रेषाखंडांनी बनलेली बंदिस्त आकृती) ची परिमिती (perimeter) म्हणजे तिच्या बाजूंची बेरीज होय. चौरसाच्या चार बाजू असतात आणि प्रत्येक बाजूची लांबी समान असते. (आकृती 11.8)



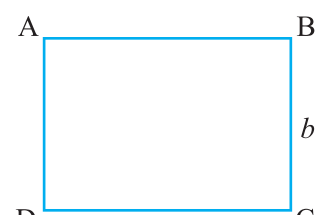
आकृती 11.8

म्हणून, चौरसाची परिमिती = चौरसाच्या सर्व बाजूंची बेरीज

$$= l + l + l + l = 4 \times l = 4l$$

अशा प्रकारे, आपण चौरसाच्या परिमितीचा एक नियम मिळवू शकतो. चल l चा वापर आपल्याला असा एक व्यापक नियम लिहिण्यात मदत करतो. जो संक्षिप्त आणि सोपा आहे.

2. आयताची परिमिती: आपल्याला माहीत आहे की, आयताला चार बाजू असतात. उदाहरणार्थ, आयत ABCD च्या चार बाजू AB, BC, CD आणि DA आहेत. (आकृती 11.9) आयताच्या समोरासमोरील बाजू नेहमी समान असतात. म्हणून आयत ABCD च्या बाजू AB आणि CD ची लांबी l आणि बाजू AD आणि BC ची लांबी b माना.



आकृती 11.9

म्हणून, आयताची परिमिती = AB ची लांबी + BC ची लांबी + CD ची लांबी + AD ची लांबी

$$= l + b + l + b$$

$$= (l + l) + (b + b)$$

$$= 2l + 2b$$

म्हणून, नियम आहे की,

आयताची परिमिती $= 2l + 2b$

या ठिकाणी l आणि b क्रमशः लांबी आणि रूंदी आहेत.

$l = b$ असतील तर काय होईल याची चर्चा करा.

जर आपण आयताची परिमिती p या चलाने दाखवली तर नियम असा बनेल.:

$$\boldsymbol{p = 2l + 2b}$$

टीप: येथे l आणि b हे दोन्ही चल आहेत. दोन्हींची किंमत वेगवेगळी आहे. म्हणजेच एका चलाची किंमत दुसऱ्या चलाच्या किंमतीवर अवलंबून नसते.

भूमितीच्या अध्ययनामध्ये तुमच्या समोर अनेक नियम आणि सूत्रे येतील. जी द्विमितीय आकृतीच्या परिमिती आणि क्षेत्रफाळांच्या तसेच, त्रिमितीय आकृत्यांचे पृष्ठफळ आणि आकारमानाशी संबंधित असतील. तसेच, बहुभुजाकृतीच्या आंतरकोनांची बेरीज, बहुभुजाकृतीचे बाह्यकोनांची संख्या इ. च्या सूत्रांची मांडणी करू शकतील. चलांचा जो संबोध तुम्ही शिकला आहोत तो असे अनेक व्यापक नियम आणि सूत्र लिहिण्यामध्ये अतिशय उपयुक्त ठरेल?

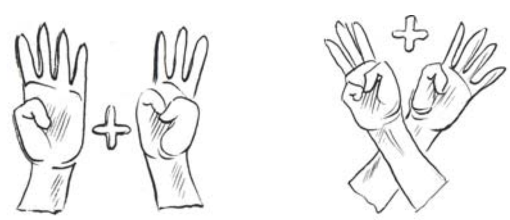
अंकगणिताचे नियम

3. दोन संख्यांच्या बेरजेची क्रमनिरपेक्षता

आपल्याला ठाऊक आहे की,

$4 + 3 = 7$ आणि $3 + 4 = 7$ आहे.

म्हणजेच, $4 + 3 = 3 + 4$



हा नियम कोणत्याही दोन पूर्ण संख्यांच्या बाबतीत सत्य आहे. संख्याच्या या नियमाला **बेरजेची क्रमनिरपेक्षता (commutativity)** म्हणतात. बेरजेमध्ये क्रम बदलला तरी संख्यांच्या बेरजेत कोणताही बदल होत नाही. चलांचा उपयोग आपल्याला या गुणधर्माची व्याप्ती संक्षिप्त रूपात मांडण्यासाठी करता येतो. समजा, a आणि b दोन चल आहेत.

तर, $\boldsymbol{a + b = b + a}$

एकदा का, आपण हा नियम वरील स्वरूपात लिहिला की, यात सर्व किंमती घालता येतात. जर $a = 4$ आणि $b = 3$ असेल तर $4 + 3 = 3 + 4$ मिळते. जर $a = 37$ आणि $b = 73$ असेल तर $37 + 73 = 73 + 37$

4. दोन संख्यांच्या गुणाकाराची क्रमनिरपेक्षता

आपण पूर्ण संख्यांच्या घटकात शिकलो आहोत की दोन संख्यांच्या गुणाकारामध्ये ज्या दोन संख्यांचा गुणाकार होतो. त्यांचा क्रम बदलला तरी गुणाकारावर काही परिणाम होत नाही.

उदाहरणार्थ,

$4 \times 3 = 12$ आणि $3 \times 4 = 12$

म्हणून $4 \times 3 = 3 \times 4$

या गुणधर्माला **गुणाकाराची क्रमनिरपेक्षता** म्हणतात. गुणाकारामध्ये संख्यांचा क्रम बदलूनही उत्तरामध्ये काही बदल होत नाही. बेरजेप्रमाणे a आणि b या चलाचा उपयोग करून आपण संख्यांच्या गुणाकाराची क्रमनिरपेक्षता व्यक्त करू शकतो.

$$a \times b = b \times a$$

लक्षात घ्या, की इथे a आणि b कोणत्याही संख्या असू शकतात. या व्यापक नियमामुळे विशिष्ट मांडणी. जसे $4 \times 3 = 3 \times 4$ किंवा $37 \times 73 = 73 \times 37$ इ. करता येतात.

5. वितरण गुणधर्म

समजा, आपल्याला 7×38 सोडवायला सांगितले. आपल्याला 38 चा पाढा येत नाही, म्हणून आपण खालील प्रकारे सोडवतो.

$$\begin{aligned} 7 \times 38 &= 7 \times (30 + 8) \\ &= 7 \times 30 + 7 \times 8 \\ &= 210 + 56 \\ &= 266 \end{aligned}$$

7, 30 आणि 8 या तीन ही संख्यांसाठी हे योग्य आहे. हा गुणधर्म **संख्यांच्या बेरजेवर गुणाकाराचे वितरण (distributivity of multiplication over addition of numbers)** म्हणून ओळखला जातो.

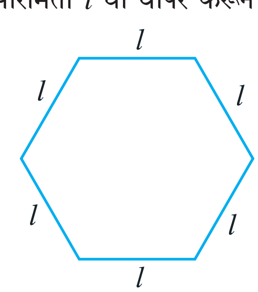
चलांचा वापर करून आपण संख्यांचा हा गुणधर्म आणखी व्यापक आणि संक्षिप्त रूपात मांडू शकतो. समजा, की a, b आणि c ही तीन चले आहेत आणि त्यांच्या कोणत्याही किंमती असू शकतात. तेव्हा,

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

संख्यांचे गुणधर्म खूपच गंमतीशीर असतात. तुम्ही यापैकी काही या वर्षी शिकणार आहात तर काही आपल्या गणित विषयात नंतर शिकाल. चलांचा वापर आपल्याला या गुणधर्मांना व्यापक आणि संक्षिप्त रूपात मांडण्यात मदत करतो. संख्यांचा आणखी एक गुणधर्म उदाहरणसंग्रह 11.2 च्या प्रश्न क्र. 5 मध्ये दिला आहे. संख्यांचे असेच आणखी काही गुणधर्म माहिती करून घ्या. तसेच चलांचा वापर करून ते अधिक व्यापक बनवा.

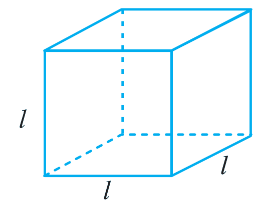
उदाहरणसंग्रह 11.2

1. एका समभुज त्रिकोणाची बाजू l ने दाखवली आहे. या समभुज त्रिकोणाची परिमिती l चा वापर करून मांडा.
2. एका सुसम षटकोनाची (Regular hexagon) बाजू l ने दाखवली आहे. (आकृती 11.10) l चा वापर करून, या षटकोनाची परिमिती मांडा. (**संकेत:** सुसम षटकोनाच्या सर्व 6 बाजू समान असतात आणि सर्व कोन समान असतात.)



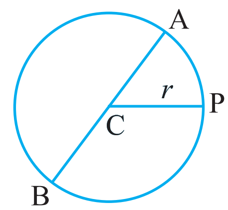
आकृती 11.10

3. घन (Cube) एक त्रिमितीय (three dimensional) आकृती आहे. (आकृती 11.11 मध्ये दाखवल्याप्रमाणे) यात 6 पृष्ठभाग असतात आणि हे सर्व चौरस समान असतात. (identical) घनाची एका (बाजू)कडेची लांबी l ने दाखवली, घनाच्या सर्व बाजूंच्या पृष्ठभागांची बेरीज काढण्यासाठी एक सूत्र शोधा.



आकृती 11.11

4. वर्तुळाचा व्यास हा असा रेषाखंड आहे जो वर्तुळावरील दोन बिंदूंना जोडतो आणि केंद्रबिंदूतून जातो. शेजारील आकृती 11.12 मध्ये AB हा वर्तुळाचा व्यास आहे आणि C हे वर्तुळकेंद्र आहे. वर्तुळाचा व्यास (d) त्रिज्या (r) च्या रुपात मांडा.



आकृती 11.12

5. तीन संख्या 14, 27 आणि 13 यांच्या बेरजेचे निरीक्षण करा. आपल्याला ही बेरीज दोन प्रकारे मिळते.
   (a) आधी आपण 14 आणि 27 ची बेरीज करून 41 हे उत्तर मिळवतो. मग 41 आणि 13 ची बेरीज केल्यावर 54 ही बेरीज मिळवू शकतो.
   (b) आपण आधी 27 आणि 13 यांची बेरीज करून 40 हे उत्तर मिळवतो आणि मग ती 14 मध्ये मिळवून 54 हे उत्तर मिळवू शकतो. अशा प्रकारे $(14 + 27) + 13 = 14 + (27 + 13)$

   कोणत्याही तीन संख्यांसाठी असे करता येईल. याला संख्यांच्या बेरजेचा साहचर्य गुणधर्म म्हणतात. हा गुणधर्म आपण पूर्ण संख्या (associative) या घटकात शिकलो आहोत. तो a, b आणि c या चलांचा वापर करून एक व्यापक रूपात मांडा.

11.7 चलयुक्त राशी

अंकगणितात आपण $2 \times 10 + 3$, $3 \times 100 + 2 \times 10 + 4$ अशा राशी (expressions) पाहिल्या होत्या. या राशी 2, 3, 4, 10, 100 इ. सारख्या संख्यांनी बनतात. म्हणजे बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार आणि भागाकार यांचा वापर केला जाऊ शकतो. उदा. $2 \times 10 + 3$ सोडवण्यासाठी आपण 2 आणि 10 चा गुणाकार करून त्यात 3 मिळवले. इतर अंकगणितीय राशींची उदाहरणे खालीलप्रमाणे:

$3 + (4 \times 5)$,	$(-3 \times 4) + 5$,
$8 - (7 \times 2)$,	$14 - (5 - 2)$,
$(6 \times 2) - 5$,	$(5 \times 7) - (3 \times 4)$,
$7 + (8 \times 2)$	$(5 \times 7) - (3 \times 4 - 7)$, इत्यादी

राशी या चलांचा उपयोग करूनदेखील मिळवता येतात. खरे तर आपण चलयुक्त राशी यापूर्वी पाहिल्या आहेत. उदाहरणार्थ, $2n$, $5m$, $x + 10$, $x - 3$ इ. या राशी चलांवर बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार अशा क्रिया केल्यानंतर मिळतात. उदाहरणार्थ, राशी $2n$ चल n ला 2 ने गुणल्यावर बनते. $(x + 10)$ ही राशी x या चलामध्ये 10 मिळवल्यावर बनते.

आपल्याला माहीत आहे की, चल वेगवेगळ्या किंमती धारण करतात. त्यांची निश्चित किंमत नसते. पण या संख्या आहेत. म्हणूनच इतर संख्यांप्रमाणेच त्यांच्यावर बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार या क्रियादेखील करता येतात.

चलयुक्त राशीच्या संबंधात एक महत्त्वाची गोष्ट लक्षात घेण्यासारखी आहे. एक संख्यात्मक राशी उदा. $4 \times 3 + 5$ ची किंमत सहज काढता येते.

उदा. $4 \times 3 + 5 = 12 + 5 = 17$

परंतु $(4x + 5)$ या राशीत x हे चल आले असून त्यांची किंमत काढणे शक्य नाही. जर x ला किंमत दिली असेल तरच त्या राशीची किंमत काढता येईल. उदाहरणार्थ, $x = 3$ असेल, तर $4x + 5 = 4 \times 3 + 5 = 17$ जे आधीदेखील प्राप्त झाले आहे.

खालील काही ओळींमध्ये, आपण पाहू की, काही राशी कशा पद्धतीने तयार होतात.

राशी	**कशाप्रकारे तयार केली**
(a) $y + 5$	y मध्ये 5 मिळवून
(b) $t - 7$	t मधून 7 वजा करून
(c) $10\,a$	a ला 10 ने गुणून
(d) $\frac{x}{3}$	x ला 3 ने भागून
(e) $-5\,q$	q ला -5 ने गुणून
(f) $3\,x + 2$	आधी x ला 3 ने गुणून आलेल्या उत्तरात 2 मिळवून
(g) $2\,y - 5$	आधी y ला 2 ने गुणून आलेल्या उत्तरातून 5 वजा करून

अशा प्रकारे आणखी दहा इतर राशी बनवा आणि कशा बनवल्या ते सांगा. आपल्याला दिलेल्या सूचनेप्रमाणे राशी बनवण्यात सक्षम बनले पाहिजे.

खालील उदाहरणे पाहा.:

दिलेल्या माहितीवरून राशी लिहा.:

(a) z मधून 12 वजा करणे	$z - 12$
(b) r मध्ये 25 मिळवणे	$r + 25$
(c) p ला 16 ने गुणणे	$16\,p$
(d) y ला 8 ने भागने	$\frac{y}{8}$
(e) m ला -9 ने गुणणे	$-9\,m$
(f) y ला 10 ने गुणून त्या उत्तरात 7 मिळवणे	$10\,y + 7$
(g) n ला 2 ने गुणून उत्तरातून l वजा करणे.	$2\,n - l$

सरिता आणि अमीनाने राशींचा एक खेळ खेळण्याचे ठरवले. त्यांनी एक चल x आणि एक संख्या 3 घेतली आणि त्यापासून किती राशी बनतात, हे पाहिले. चारही मूलभूत क्रियांपैकी कोणतीही एकच क्रिया वापरण्याचे बंधन घातले आणि प्रत्येक राशीमध्ये x असलाच पाहिजे. तुम्ही त्यांची मदत करू शकता का?

सरिता $(x + 3)$ असे ठरवते.

अमीना $(x - 3)$ बनवते.

> $(3x + 5)$ होऊ शकते का?
> $(3x + 3)$ होऊ शकते का?

त्यापुढील ती $3x$ सांगते. तेव्हा सरिता लगेच $\frac{x}{3}$ सांगते. दिलेल्या अटीचे पालन करून फक्त चारच राशी बनतील का?

आता यानंतर, त्या y, 3 आणि 5 च्या साहाय्याने राशी बनवण्याचा प्रयत्न करतात.अट अशी आहे की, बेरीज, वजाबाकीपैकी एक आणि गुणाकार-भागाकारापैकी एक अशा क्रिया निवडू शकतील. प्रत्येक राशीमध्ये y असलाच पाहिजे.

खाली दिलेली उत्तरे बरोबर आहेत की नाहीत ते पडताळून पहा.

$y + 5$, $y + 3$, $y - 5$, $y - 3$,

$3y$, $5y$, $\frac{y}{3}$, $\frac{y}{5}$, $3y + 5$, $3y - 5$, $5y + 3$, $5y - 3$

तुम्ही इतर काही राशी बनवू शकता का?

> $\left(\frac{y}{3}+5\right)$ अशी राशी बनेल का?
> $(y + 8)$ बनेल का?
> $15\ y$ तयार करता येईल का?

उदाहरणसंग्रह 11.3

1. 5, 7 आणि 8 या संख्या प्रत्येकी एकदाच वापरून आणि बेरीज, वजाबाकी आणि गुणाकार यांचा वापर करून जास्तीत जास्त (पदावल्या) राशी तयार करा.

   > (**संकेत :** तीन संभाव्य राशी. $5 + (8 - 7)$, $5 - (8 - 7)$ आणि $5 \times 8 + 7$ आहेत. इतर राशी बनवा.)

2. खालीलपैकी कोणत्या राशी केवळ संख्यात्मक राशी आहेत?

   (a) $y + 3$ (b) $7 \times 20 - 8z$

   (c) $5\,(21 - 7) + 7 \times 2$ (d) 5

   (e) $3x$ (f) $5 - 5n$

   (g) $7 \times 20 - 5 \times 10 - 45 + p$

3. खालील राशी बनवण्यासाठी वापरलेल्या क्रिया (बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार) ओळखा आणि राशी कोणत्या प्रकारे तयार केली आहे ते पाहा.:

   (a) $z + 1$, $z - 1$, $y + 17$, $y - 17$, (b) $17y$, $\frac{y}{17}$, $5\,z$,

   (c) $2y + 17$, $2\,y - 17$, (d) $7\,m$, $-7\,m + 3$, $-7\,m - 3$

4. खालील माहितीसाठी राशी लिहा:
   (a) p मध्ये 7 मिळवले
   (b) p मधून 7 वजा करणे
   (c) p ला 7 ने गुणणे
   (d) p ला 7 ने भागणे
   (e) $-m$ मधून 7 कमी करणे
   (f) $-p$ ला 5 ने गुणणे
   (g) $-p$ ला 5 ने भागणे
   (h) p ला -5 ने गुणणे
5. खालील माहितीवरून राशी लिहा.
   (a) $2m$ मध्ये 11 मिळवणे
   (b) $2m$ मधून 11 वजा करणे
   (c) y च्या 5 पटीत 3 मिळवणे
   (d) y च्या 5 पटीतून 3 कमी करणे
   (e) y ला -8 ने गुणणे
   (f) y ला 8 ने गुणून उत्तरात 5 मिळवणे
   (g) y ला 5 ने गुणून उत्तरातून 16 वजा करणे
   (h) y ला -5 ने गुणून उत्तरात 16 मिळवणे
6. (a) t आणि 4 यांचा वापर करून राशी बनवा. एकापेक्षा अधिक क्रियांचा वापर करू नका. प्रत्येक राशीत t असला पाहिजे.
   (b) y, 2 आणि 7 चा वापर करून राशी बनवा. प्रत्येक राशीमध्ये y असलाच पाहिजे. केवळ दोन वेगवेगळ्या क्रियांचा वापर करा.

11.8 व्यवहारात राशींचा वापर

आपल्या समोर अनेक व्यावहारिक प्रसंग आले आहेत. जेथे राशी उपयोगी ठरतात. चला, त्यापैकीच काही पुन्हा आठवू:

प्रसंग (साध्या भाषेत)	चल	राशींचा वापर करून केलेले वर्णन
1. सरिताजवळ अमीनापेक्षा 10 मणी जास्त आहेत.	समजा अमीनाकडे x मणी आहेत.	सरिताजवळ $(x + 10)$ मणी आहेत.
2. बाळू राजूपेक्षा 3 वर्षांनी लहान आहे.	राजूचे वय x वर्षे मानू	बाळूचे वय $(x - 3)$ वर्षे आहे.
3. विकासचे वय राजूच्या वयाच्या दुप्पट आहे	राजूचे वय x मानू	विकासचे वय $2x$ वर्षे आहे.
4. राजूच्या वडिलांचे वय राजूच्या वयाच्या तिपटीपेक्षा 2 ने जास्त आहे.	राजूचे वय x मानू	राजूच्या वडिलांचे वय $(3x + 2)$ वर्ष आहे

चला, असेच आणखी प्रसंग पाहू.:

प्रसंग (साध्या भाषेत)	चल	राशींचा वापर करून केलेले वर्णन
5. आजपासून 5 वर्षांनंतर सुझानचे वय किती होईल?	सुझानेच आजचे वय y वर्षे मानू.	5 वर्षानंतर सुझानचे वय $(y + 5)$ वर्षे

6. 4 वर्षांपूर्वी सुझानचे वय किती असेल?	सुझानचे आजचे वय y वर्षे मानू	4 वर्षांपूर्वी सुझानचे वय $(y-4)$ वर्षे असेल.
7. गव्हाचे प्रतिकिग्रॅचा दर तांदळाच्या प्रतिकिग्रॅच्या दराहून 5 रु. नी कमी आहे	तांदळाचा प्रतिकिग्रॅचा दर p रु. मानू	गव्हाचा प्रतिकिग्रॅचा दर $(p-5)$ रु. आहे.
8. प्रतिलीटर तेलाचा भाव प्रतिकिग्रॅ तांदळाच्या भावाच्या 5 पट आहे.	तांदळाच्या प्रतिकिग्रॅचा भाव p रु. मानू.	तेलाचा प्रतिलीटरचा भाव $5p$ रु. होईल.
9. एका बसचा वेग त्याच रस्त्याहून जाणाऱ्या ट्रकच्या वेगापेक्षा ताशी 10 किमी जास्त आहे.	ट्रकचा वेग ताशी y किमी मानू	बसचा वेग ताशी $(y + 10)$ किमी होईल

अशाच आणखी काही प्रसंगांविषयी माहिती घ्या. तुमच्या लक्षात येईल की, साध्या भाषेतील कितीतरी विधाने चलयुक्त राशींचा वापर करून होणाऱ्या विधानांमध्ये बदलता येऊ शकतात. पुढील भागात आपण पाहू की या राशींद्वारा बनलेल्या विधानांचा वापर आपण कशा पद्धतीने करतो.

उदाहरणसंग्रह 11.4

1. खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

(a) सरिताचे आजचे वय y वर्षे आहे, असे समजा.

(i) 5 वर्षांनंतर तिचे वय किती असेल?

(ii) 3 वर्षांपूर्वी तिचे वय किती होते?

(iii) सरिताच्या आजोबांचे वय तिच्या वयाच्या सहापट आहे. तिच्या आजोबांचे वय किती?

(iv) तिची आजी आजोबांपेक्षा 2 वर्षांनी लहान आहे. आजीचे वय किती?

(v) सरिताच्या वडिलांचे वय सरिताच्या वयाच्या तिपटीपेक्षा 5 ने जास्त आहे. तिच्या वडिलांचे वय काय?

(b) एका आयताकार हॉलची लांबी रुंदीच्या तिपटीपेक्षा 4 मी. ने कमी आहे. जर रुंदी b मीटर आहे, तर लांबी किती?

(c) एका आयताकार खोक्याची उंची h सेमी आहे. त्याची लांबी उंचीच्या 5 पट आहे आणि रुंदी लांबीपेक्षा 10 सेमीने कमी आहे. खोक्याची लांबी व रुंदी उंचीच्या स्वरुपात मांडा.

(d) मीना, बीना आणि लीना टेकडीच्या माथ्यावर पोचण्यासाठी पायऱ्या चढत आहेत. मीना s व्या पायरीवर आहे. बीना मीनापेक्षा 8 पायऱ्या पुढे आहे आणि लीना मीनापेक्षा 7 पायऱ्या मागे आहेत. वर जाण्यासाठी मीना जेवढ्या पायऱ्या चढली त्याच्या चौपटी पेक्षा 10 ने कमी एकूण पायऱ्यांची संख्या आहे. पायऱ्यांची एकूण संख्या s या स्वरुपात मांडा.

(e) एक बस ताशी v किमी वेगाने जात आहे. ती दासपूरहून विसापूरला जात आहे. 5 तास प्रवास झाल्यानंतरही विसापूर अजून 20 किमी लांब आहे. दासपूर ते विसापूर अंतर किती आहे? हे v चा उपयोग करून मांडा.

2. राशी वापरून केलेली विधाने साध्या भाषेतील विधानांमध्ये बदला.

(उदाहरणार्थ, एका क्रिकेटच्या सामन्यात सलीमने r धावा केल्या आणि नलिनने $(r + 15)$ धावा केल्या. साध्या भाषेत, नलिनने सलीमपेक्षा 15 धावा जास्त केल्या.

(a) एका स्वाध्याय पुस्तिकेची किंमत p रु. आहे. तीन पुस्तकाची किंमत $3p$ रु. आहे.

(b) टोनीने टेबलावर q गोट्या ठेवल्या. त्याच्याकडे डब्यात $8\ q$ गोट्या आहेत.

(c) आमच्या वर्गात n विद्यार्थी आहेत. शाळेत $20\ n$ विद्यार्थी आहेत.

(d) जग्गूचे वय z वर्षे आहे. त्याच्या काकांचे वय $4\ z$ आहे आणि काकीचे वय $(4z - 3)$ वर्षे आहे.

(e) ठिपक्यांच्या (dots) एका मांडणीमध्ये r ओळी आहेत. प्रत्येक ओळीत 5 ठिपके आहेत.

3. (a) मुन्नूचे वय x वर्षे दिले आहे, $(x - 2)$ म्हणजे काय याचा अंदाज करा.

(**संकेत:** मुन्नूच्या लहान भावाबद्दल विचार करा.) $(x + 4)$ $(3\ x + 7)$ हे काय दर्शवित असतील याचा अंदाज करा.

(b) साराचे सध्याचे वय y वर्षे आहे. तिच्या भविष्यातील आणि पूर्वीच्या वयांचा विचार करा. खालील राशी काय दर्शवित असतील?

$$y + 7, y - 3, y + 4\frac{1}{2}, y - 2\frac{1}{2}$$

(c) एका वर्गातील n विद्यार्थी फुटबॉल खेळतात. $2n$ ही राशी काय दर्शविते? $\frac{n}{2}$ काय दर्शवू शकते? (**संकेत:** फुटबॉल शिवाय इतर खेळांचा विचार करा.)

11.9 एकचल समीकरण म्हणजे काय?

आकृती 11.1 मध्ये काड्यांपासून बनवलेल्या L या अक्षराचा आकृतीबंध आठवा. तुमच्या सोईसाठी खाली पुन्हा दिला आहे.

(a) (b) (c)

विविध संख्यांइतके L बनवण्यासाठी आवश्यक काड्यांची संख्या तक्ता –1 मध्ये दिली होती. तो तक्ता इथे पुन्हा दिला आहे.

तक्ता-1

बनवलेल्या L ची संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	_ _ _ _ _
आवश्यक काड्यांची संख्या	2	4	6	8	10	12	14	16	_ _ _ _ _

आपल्याला हे ठाऊक आहे की आवश्यक काड्यांची संख्या पुढील नियमाने मिळते.

जर, बनवलेल्या L ची संख्या n असेल, तर काड्यांची संख्या $2n$

अप्पू वेगवेगळ्या प्रकारे विचार करतो. तो विचारतो की, आपल्याला हे ठाऊक आहे की, L ची संख्या दिली तर आवश्यक काड्यांची संख्या कशी काढतात. पण जर याच्याउलट माहिती दिली म्हणजे काड्यांची संख्या दिली असेल तर L ची संख्या कशी काढता येईल?

आपण स्वत:लाच एक प्रश्न विचारूया.

जर 10 काड्या दिल्या असतील, तर L किती होतील?

याचा अर्थ, जेव्हा काड्यांची संख्या $2n = 10$ असेल तेव्हा L ची संख्या (म्हणजे n) आपल्याला शोधायची आहे. काड्यांची संख्या $2n = 10$ ----(1) दिली आहे.

येथे आपण एक अट घातलेली पाहतो. जी n या चलाद्वारे पूर्ण व्हायला हवी. ही अट समीकरणाचे (equation) एक उदाहरण आहे.

आपल्या प्रश्नाचे उत्तर तक्ता–1 पाहून काढता येईल. n च्या विविध किंमती पहा. जर $n = 1$ तर काड्या = 2 म्हणजे आपली अट ($2n = 10$) ही पूर्ण होऊ शकत नाही. आपण पडताळून पाहू.

n	$2n$	अट पूर्ण होते का? होय/नाही
2	4	नाही
3	6	नाही
4	8	नाही
5	10	होय
6	12	नाही
7	14	नाही

आपल्याला असे आढळून येते की, फक्त $n = 5$ साठीच दिलेली अट म्हणजे $2n = 10$ पूर्ण होते. 5 सोडून इतर कोणत्याही किंमतीसाठी हे समीकरण पूर्ण होत नाही.

आणखी एक समीकरण पाहूया.

बाळू राजूपेक्षा 3 वर्षांनी लहान आहे. राजूचे वय x वर्षे घेतल्यास बाळूचे वय $(x - 3)$ वर्षे. समजा की, बाळूचे वय 11 वर्षे आहे. तर आता आपण आपल्या पद्धतीने राजूचे वय काढू.

बाळूचे वय $x - 3 = 11$ (2)

हे समीकरण x या चलात आहे. आपण x च्या विविध किंमतीसाठी $(x - 3)$ च्या किंमतीचा एक तक्ता बनवू.

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$x - 3$	0	1	–	–	–	–	–	–	–	9	10	11	12	13	–	–

ज्या जागा रिकाम्या ठेवल्यात त्या भरा. तक्त्यावरून असे दिसते की, $x = 14$ साठीच $x - 3 = 11$ ही अट पूर्ण होते. इतर किंमती जसे, $x = 16$ किंवा $x = 12$ साठी ही अट पूर्ण होत नाही. म्हणून राजूचे वय 14 वर्षे आहे.

वरील सगळ्याचा सारांश म्हणजे, **एकचल समीकरण ही चलाला दिलेली एक अट असते . ही केवळ चलाच्या एकाच निश्चित किंमतीने पूर्ण होते.** उदाहरणार्थ, समीकरण $2n = 10$ चे n चलाच्या केवळ 5 या किंमतीने समाधान होते. त्याचप्रमाणे $x - 3 = 11$ या समीकरणाचे n च्या 14 या किंमतीनेच समाधान होते.

लक्षात ठेवा की, एकचल समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंमध्ये **समानतेचे चिन्ह** (=) असते. समीकरण सांगते की, डावी बाजू (LHS) ची किंमत उजवी बाजू (RHS) इतकी असते. जर डावी बाजू उजव्या बाजू एवढी नसेल तर ते समीकरण होऊ शकत नाही.

उदाहरणार्थ, $2n$ ही संख्या 10 पेक्षा मोठी आहे. अर्थात $2n > 10$ हे समीकरण नाही. तसेच $(x - 3) > 11$ आणि $(x - 3) < 11$ ही देखील समीकरणे नाहीत. $2n$ ही संख्या 10 पेक्षा लहान आहे, म्हणजेच $2n < 10$ हे सुद्धा समीकरण नाही. तसेच $(x - 3) > 11$ आणि $(x - 3) < 11$ ही विधानेसुद्धा समीकरणे नाहीत.

आता $8 - 3 = 5$ याचा विचार करू.

इथे डावी बाजू (=) उजवी बाजू आहे. दोन्हींकडे चल संख्या नाही. दोन्ही बाजूंना संख्या आहेत. याला संख्यात्मक समीकरण म्हणतात. साधारणत: समीकरण या शब्दाचा उपयोग केवळ एक किंवा जास्त चल असल्यावरच केला जातो.

खालील प्रश्न सोडवा.

कोणकोणती विधाने समीकरण आहेत? समीकरणामधील चल सुद्धा सांगा.

(a) $x + 20 = 70$	(आहे, x)
(b) $8 \times 3 = 24$	(नाही, हे संख्यात्मक समीकरण आहे.)
(c) $2p > 30$	(नाही)
(d) $n - 4 = 100$	(होय, n)
(e) $20b = 80$	(होय, b)
(f) $\frac{y}{8} < 50$	(नाही)

समीकरणाची आणखी काही उदाहरणे पाहू. (काही समीकरणांमध्ये चल दिले आहेत.)

अपेक्षित रिकाम्या जागा पूर्ण करा:

$x + 10 = 30$	(चल x)	(3)
$p - 3 = 7$	(चल p)	(4)
$3n = 21$	(चल _____)	(5)
$\frac{t}{5} = 4$	(चल _____)	(6)
$2l + 3 = 7$	(चल _____)	(7)
$2m - 3 = 5$	(चल _____)	(8)

11.10 एकचल समीकरणाची उकल

आपण मागील भागात पाहिले आहे की समीकरण

$2n = 10$ (1)

चे $n = 5$ ने समाधान. n ची इतर कोणतीही किंमत समीकरणाचे समाधान करू शकत नाही. **समीकरणामध्ये चलाची जी किंमत समीकरणाचे समाधान करते तिला समीकरणाची उकल (solution) म्हणतात.** अशा प्रकारे, $n = 5$ हे समीकरण $2n = 10$ ची उकल आहे.

लक्षात घ्या, $n = 6$ ही $2n = 10$ ची उकल नाही कारण, $n = 6$ म्हणजे, $2n = 2 \times 6 = 12$ आणि हे 10 नाहीत.

तसेच $n = 4$ ही पण उकल नाही.

सांगा बरे का नाही?

$$x - 3 = 11 \qquad (2)$$

हे समीकरण पाहू, हे $x = 14$ ने पूर्ण होते. कारण $x = 14$ मुळे डावी बाजू $= 14 - 3 = 11 =$ उजवी बाजू होते. हे समीकरण $x = 16$ ने पूर्ण होत नाही. कारण $x = 16$ मुळे, समीकरणाची डावी बाजू $= 16 - 3 = 13$, जी उजवी बाजू नाही.

अशा प्रकारे $x = 14$ ही समीकरण $x - 3 = 11$ ची उकल आहे. परंतु $x = 16$ ही उकल नाही. तसेच, $x = 12$ ही पण उकल नाही.

का नाही ते स्पष्ट करा. आता खालील तक्ता पाहा. तक्त्यातील रिकाम्या जागा पूर्ण करा आणि तुमचे उत्तर हो/नाही हे लिहा.

समीकरण	चलाचे नाव	उकल (हो/नाही)
1. $x + 10 = 30$	$x = 10$	नाही
2. $x + 10 = 30$	$x = 30$	नाही
3. $x + 10 = 30$	$x = 20$	आहे
4. $p - 3 = 7$	$p = 5$	नाही
5. $p - 3 = 7$	$p = 15$	–
6. $p - 3 = 7$	$p = 10$	–
7. $3n = 21$	$n = 9$	–
8. $3n = 21$	$n = 7$	–
9. $\frac{t}{5} = 4$	$t = 25$	–
10. $\frac{t}{5} = 4$	$t = 20$	–
11. $2l + 3 = 7$	$l = 5$	–
12. $2l + 3 = 7$	$l = 1$	–
13. $2l + 3 = 7$	$l = 2$	–

$2n = 10$ या समीकरणाची उकल करण्यासाठी आपण n आणि वेगवेगळ्या किंमतीचा तक्ता बनवला होता आणि मग या तक्त्यामधून n जी किंमत निवडली तीच उकल होती. आपण जे केले ती **प्रयत्न आणि प्रमाद पद्धत** होती. **(a trial and error method)** ही उकल शोधण्याची **सोपी किंवा व्यावहारिक पद्धत** नाही. आता आपण समीकरण सोडवण्याची एक सोपी पद्धत पाहूया. आपण केवळ पुढचे एक वर्ष (म्हणजेच पुढच्या वर्गापर्यंत) ही समीकरण सोडवण्याची पद्धत वापरणार आहोत.

बीजगणिताची सुरुवात

असे म्हटले जाते की गणिताचे एक क्षेत्र म्हणून बीजगणिताची सुरुवात जवळपास इ.स.पू. 1550 मध्ये म्हणजेच 3500 वर्षांपूर्वी झाली. जेव्हा अरब लोकांनी अज्ञात संख्या मांडण्यासाठी चिन्हांचा वापर सुरू केला.

इ.स.पू. 300 च्या जवळपास भारतात अज्ञात अक्षरांनी व्यक्त करणे आणि राशी तयार करणे ही एक सामान्य गोष्ट होती. अनेक महान भारतीय गणितज्ज्ञ जसे की, **आर्यभट्ट** (जन्म इ. स. 476), **ब्रम्हगुप्त** (जन्म इ. स. 598), **महावीर** (अंदाजे इ. स. 850), आणि **भास्कर -II** (जन्म इ. स. 1114), तसेच, इतरही अनेकांनी बीजगणितामध्ये आपले योगदान दिले आहे. त्यांनी अज्ञात राशींसाठी **बीज, वर्ण** इ. नावे दिली. त्यांना व्यक्त करण्यासाठी रंगांच्या नावांची आद्याक्षरे वापरली. (जसे काला–'का', निळा–'नि' इ.). अल्जिब्रा (Algebra) साठी 'बीजगणित' हे नाव या प्राचीन भारतीय गणितज्ज्ञांच्या काळातील आहे.

'अल्जिब्रा' हा शब्द अंदाजे इ.स. 825 मध्ये बगदादमधील एक अरब गणितज्ज्ञ मुहम्मद इबन अल खोवारिज्मी लिखित एक पुस्तक 'अल्जिबार वॉल अलमुगाबालाह' या नावावरून घेतला आहे.

उदाहरणसंग्रह 11.5

1. खालीलपैकी कोणती विधाने एक चल समीकरणे आहेत? (सकारण उत्तर द्या.) समीकरणामधील चल पण लिहा.

(a) $17 = x + 17$ (b) $(t - 7) > 5$ (c) $\frac{4}{2} = 2$

(d) $7 \times 3 - 13 = 8$ (e) $5 \times 4 - 8 = 2x$ (f) $x - 2 = 0$

(g) $2m < 30$ (h) $2n + 1 = 11$ (i) $7 = 11 \times 5 - 12 \times 4$

(j) $7 = 11 \times 2 + p$ (k) $20 = 5y$ (l) $\frac{3q}{2} < 5$

(m) $z + 12 > 24$ (n) $20 - (10 - 5) = 3 \times 5$ (o) $7 - x = 5$

2. तक्त्यामधील तिसरा स्तंभ पूर्ण करा.:

अ. क्र.	समीकरण	चलाची किंमत	समीकरणाचे समाधान होते/होत नाही
(a)	$10y = 80$	$y = 10$	———
(b)	$10y = 80$	$y = 8$	———
(c)	$10y = 80$	$y = 5$	———
(d)	$4l = 20$	$l = 20$	———
(e)	$4l = 20$	$l = 80$	———
(f)	$4l = 20$	$l = 5$	———
(g)	$b + 5 = 9$	$b = 5$	———
(h)	$b + 5 = 9$	$b = 9$	———
(i)	$b + 5 = 9$	$b = 4$	———
(j)	$h - 8 = 5$	$h = 8$	———
(k)	$h - 8 = 5$	$h = 0$	———
(l)	$h - 8 = 5$	$h = 3$	———
(m)	$p + 3 = 1$	$p = 3$	———
(n)	$p + 3 = 1$	$p = 1$	———
(o)	$p + 3 = 1$	$p = 0$	———
(p)	$p + 3 = 1$	$p = -1$	———
(q)	$p + 3 = 1$	$p = -2$	———

3. खाली प्रत्येक समीकरणाच्या पुढील कंसातून योग्य किंमत शोधून समीकरणाची उकल शोधा. इतर किंमती समीकरण पूर्ण करू शकत नाही. हे दाखवा.

(a) $5m = 60$ (10, 5, 12, 15)

(b) $n + 12 = 20$ (12, 8, 20, 0)

(c) $p - 5 = 5$ (0, 10, 5, – 5)

(d) $\frac{q}{2} = 7$ (7, 2, 10, 14)

(e) $r - 4 = 0$ (4, – 4, 8, 0)

(f) $x + 4 = 2$ (– 2, 0, 2, 4)

4. (a) खालील तक्ता पूर्ण करा आणि तक्ता पाहून $m + 10 = 16$ ची उकल शोधा.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	__	__	__
$m + 10$	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__

(b) खालील तक्ता पूर्ण करा आणि तक्ता पाहून $5t = 35$ ची उकल शोधा.

t	3	4	5	6	7	8	9	10	11	__	__	__	__	__
$5t$	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__

(c) तक्ता पूर्ण करा आणि $\frac{z}{3} = 4$ ची उकल शोधा.

z	8	9	10	11	12	13	14	15	16	__	__	__
$\frac{z}{3}$	$2\frac{2}{3}$	3	$3\frac{1}{3}$	__	__	__	__	__	__	__	__	__

(d) तक्ता पूर्ण करा आणि $m - 7 = 3$ ची उकल शोधा.

m	5	6	7	8	9	10	11	12	13	__	__
$m - 7$	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__	__

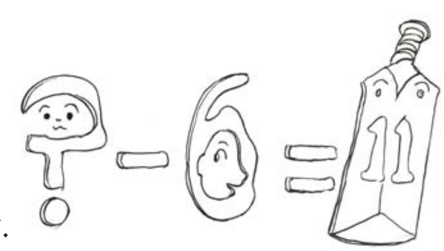
5. खालील कोडी सोडवा. अशी कोडी तुम्ही स्वत: देखील बनवू शकता.

मी कोण ?

(i) एका चौरसाच्या कडेने जा.
प्रत्येक कोपरा तीन
वेळा मोजा. त्यापेक्षा जास्तवेळा,
नाही. माझ्यात मिळवा आणि
बरोबर चौतीस उत्तर मिळेल.

(iii) आठवड्यात प्रत्येक
दिवसास माझ्यापुढे मोजा.
जर तुम्ही काही चूक केली
नाही तर तुम्हांला तेवीस मिळतील

(ii) मी एक विशिष्ट संख्या
आहे. माझ्यातून सहा
कमी करा आणि क्रिकेटची एक टीम बनवा.



(iv) सांगा पाहू मी कोण?
मी एक छान संकेत देते,
तुम्ही मला पुन्हा मिळवाल,
जर माझ्यातून बावीस घालवाल.

आपण कोणती चर्चा केली ?

1. आपण काड्यांचा वापर करून अक्षरे आणि इतर आकारांचे आकृतिबंध पाहिले. आपण एखादा आकार अनेक वेळा बनवण्यासाठी आवश्यक काड्यांची संख्या प्राप्त करण्यासाठी व्यापक नियम लिहिणे शिकलो. जो आकार बनवला जातो. जितक्या वेळा बनवला जातो. ती संख्या बदलत राहते. त्या किंमती 1,2,3,...असू शकतात. हे एक चल आहे. त्याला कोणत्याही अक्षराने (जसे की, n) दाखवता येते.

2. चलाच्या विविध किंमती असू शकतात. याची किंमत (निश्चित) स्थिर नसते. एका चौरसाची लांबी कितीही असू शकते. ती एक चल आहे. पण त्रिकोणाच्या कोनांची संख्या तीन निश्चित आहे. ही चल नाही.

3. चल दाखवण्यासाठी आपण n, l, m, p, x, y, z अशी कोणतीही अक्षरे वापरू शकतो.

4. प्रत्यक्ष व्यवहारात आपण चलांच्या मदतीने विविध संबंध स्पष्ट करू शकतो.

5. चल म्हणजे संख्याच आहेत. परंतु, ज्यांच्या किंमती स्थिर किंवा निश्चित नाहीत. आपण संख्यांप्रमाणेच त्यांच्यावर बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार इ. क्रिया करू शकतो. विविध क्रियांचा वापर करून आपण चलयुक्त राशी बनवू शकतो. उदा. $x - 3$, $x + 3$, $2n$, $5m$, $\frac{p}{3}$, $2y + 3$, $3l - 5$ इत्यादी.

6. चलामुळे भूमिती आणि अंकगणित या दोन्हींचे मूलभूत नियम व्यापक रूपात मांडण्यास मदत मिळते. उदाहरणार्थ हा नियम की, कोणत्याही दोन संख्या कोणत्याही क्रमाने मिळवल्या तरी बेरीज तीच राहते. आपण $a + b = b + a$ असे लिहू शकतो. येथे a आणि b ही चले $1, 32, 1000, -7, -20$ अशा कोणत्याही किंमती धारण करू शकतात.

7. समीकरण हे चलाला घातलेली एक अट आहे. एक चलयुक्त राशी बरोबर एक स्थिर संख्या या रूपात आपण समीकरण मांडू शकतो. उदा. $x - 3 = 10$

8. समीकरणाला दोन बाजू असतात. डावी बाजू (LHS) आणि उजवी बाजू (RHS) या दोघांमध्ये समानता (=) चिन्ह असते.

9. समीकरणाची डावी बाजू त्याच्या उजव्या बाजूबरोबर चलाच्या एका निश्चित किंमतीसाठीच असते. आपण असे म्हणतो की, चलाची ती निश्चित किंमत समीकरणाचे समाधान करते. ही किंमत म्हणजे समीकरणाची उकल असते.

10. उकल शोधण्यासाठी एक पद्धत 'प्रयत्न आणि प्रमाद पद्धत' आहे. या पद्धतीमध्ये आपण चलाला एखादी किंमत देऊन ती किंमत समीकरणाचे समाधान करते की नाही, हे पाहतो. आपण चलासाठी तोपर्यंत किंमती देतो. जोपर्यंत योग्य किंमत मिळत नाही, म्हणजे समीकरणाची उकल मिळत नाही.