

# गुणोत्तर आणि प्रमाण

## प्रकरण 12

### 12.1 प्रस्तावना

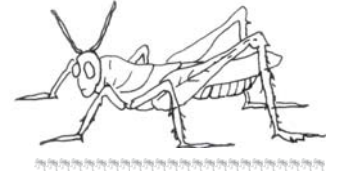
आपल्या दैनंदिन जीवनात अनेक वेळा दोन राशींची तुलना करावी लागते. उदाहरणार्थ : अवनीने आणि शैरीने आपल्या चिकटवहीसाठी फुले गोळा केली. अवनीने 30 आणि शैरीने 45 फुले गोळा केली.

आपण असे म्हणू शकतो की, शैरीने  $45-30=15$  फुले जादा गोळा केली.

वजाबाकीने तुलना करण्याची एक पद्धत आहे. रहीमची उंची 150 सेमी आणि अवनीची 140 सेमी आहे. येथे रहीमची उंची अवनीच्या उंचीपेक्षा  $150-140=10$  सेमी अधिक आहे.

जर आपण एका मुंगीची लांबी आणि नाकतोड्याची लांबी यांची तुलना करायची ठरविली तर वजाबाकीने तुलना करणे योग्य होणार नाही. नाकतोड्याची लांबी 4 ते 5 सेमी असते की जी मुंगीच्या लांबीपेक्षा खूप लांब आहे. कारण मुंगीची लांबी काही मिमीच असते. जर नाकतोड्याच्या लांबीबरोबर एकामागे एक, मुंग्यांची ओळ तयार केली तर तुलना करणे योग्य ठरेल. यावरून आपल्याला असे म्हणता येईल की, 20 ते 30 मुंग्यांची एकूण लांबी एका नाकतोड्याच्या लांबीबरोबर आहे.

आणखी उदाहरणे पाहू, एका चारचाकी गाडीची किंमत ₹ 2,50,000 आहे आणि मोटारसायकलची किंमत ₹ 50,000 आहे. जर आपण त्यांच्या किमतीमधील फरक काढला तर तो होईल ₹ 2,00,000 जर ही तुलना आपण भागाकाराने केली तर ती कशी असेल :



$$\frac{2,50,000}{50,000} = \frac{5}{1}$$

आपण असे म्हणू शकतो की, चारचाकी गाडीची किंमत मोटारसायकलच्या किमतीच्या पाच पट आहे. अशाप्रकारे काही वेळेस पटीने केलेली तुलना, वजाबाकीने केलेल्या तुलनेपेक्षा जास्त चांगली असते. पटीने केलेल्या तुलनेस 'गुणोत्तर' असे म्हणतात. पुढील भागात गुणोत्तराविषयी आपण अधिक शिकणार आहोत.

## 12.2 गुणोत्तर

खालील उदाहरणे पहा.

ईशाचे वजन 25 किग्रॅ आहे आणि तिच्या वडिलांचे वजन आहे 75 किग्रॅ. वडिलांचे वजन, मुलीच्या वजनाच्या किती पट आहे? ते तीनपट आहे.

एका पेनाची किंमत ₹ 10 आहे आणि एका पेन्सिलची किंमत ₹ 2 आहे. पेनची किंमत पेन्सिलच्या किमतीच्या किती पट आहे? सरळ आहे, पाच पट.

**वरील उदाहरणांमध्ये आपण दोन राशींची तुलना 'किती पट' या स्वरूपात केली. या तुलनेस 'गुणोत्तर' असे म्हणतात. आपण गुणोत्तर ':' या चिन्हाने दर्शविणार आहोत.**

मागील उदाहरणांचा पुन्हा विचार करू या. आपण असे म्हणू शकतो की,

$$\text{वडिलांच्या वयाचे मुलीच्या वयाशी असलेले गुणोत्तर} = \frac{75}{25} = \frac{3}{1} = 3:1$$

$$\text{पेनाची किमतीचे पेन्सिलच्या किमतीशी असलेले गुणोत्तर} = \frac{10}{2} = \frac{5}{1} = 5:1$$

### प्रयत्न करा

- एका वर्गात 20 मुले आणि 40 मुली आहेत. मुलांच्या संख्येचे मुलींच्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर काय असेल?
- रवि एका तासात 6 किमी चालतो तर रोशन एका तासात 4 किमी चालतो. तर रविने एकूण चाललेल्या अंतराशी रोशनने एकूण चाललेल्या अंतराचे गुणोत्तर काढा.

या प्रश्नांकडे पाहू या.

एका वर्गात 20 मुले आणि 40 मुली आहेत. गुणोत्तर काढा:

(a) मुलींच्या संख्येचे एकूण विद्यार्थ्यांशी

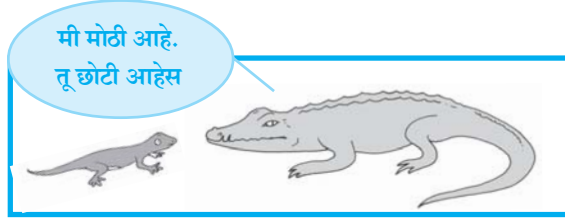
(b) मुलांच्या संख्येचे एकूण विद्यार्थ्यांशी

सर्वप्रथम आपल्याला एकूण विद्यार्थी संख्या माहीत पाहिजे. ती आहे.

$$\text{मुलींची संख्या} + \text{मुलांची संख्या} = 20 + 40 = 60$$

$$\text{आता, मुलींच्या संख्येचे एकूण विद्यार्थी संख्येशी असलेले गुणोत्तर} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

(b) ची उकल अशाप्रकारे काढा.



खालील उदाहरण पाहा.

घरात दिसणारी पाल 20 सेंमी लांबीची आहे, तर मगरीची लांबी आहे 4 मीटर.

“मी तुझ्यापेक्षा 5 पटीने लांब आहे.” पाल म्हणाली. खरं तर हे पूर्णपणे चुकीचे विधान आहे. एका पालीची लांबी मगरीच्या लांबीच्या पाचपट असू शकत नाही. मग चूक कोठे आहे? नीट लक्षात घेतले तर असे लक्षात येते की, पालीची लांबी सेंमीमध्ये आहे तर मगरीची लांबी मीटरमध्ये दिलेली आहे. म्हणून यांच्या लांबी समान एककात करून घ्यायला पाहिजे.

मगरीची लांबी = 4 मी =  $4 \times 100 = 400$  सेंमी

म्हणून, मगरीच्या लांबीचे पालीच्या लांबीशी असलेले गुणोत्तर असे होईल-

$$= \frac{400}{20} = \frac{20}{1} = 20:1.$$

दोन राशींची तुलना तेव्हाच करता येते जेव्हा त्या दोन्ही एकाच एककात असतात.

पालीच्या लांबीचे मगरीच्या लांबीशी गुणोत्तर काय असेल?

$$\text{ते आहे } \frac{20}{400} = \frac{1}{20} = 1:20$$

लक्षात ठेवा, 1 : 20 आणि 20 : 1 एकमेकांपेक्षा वेगळे आहेत. 1 : 20 हे पालीच्या लांबीचे, मगरीच्या लांबीशी असलेले गुणोत्तर आहे आणि 20 : 1 हे मगरीच्या लांबीचे पालीच्या लांबीशी असलेले गुणोत्तर आहे.

आणखी एक उदाहरण पाहू.

पेन्सिलची लांबी 18 सेंमी आहे आणि तिचा व्यास 8 मिमी आहे. पेन्सिलच्या व्यासाचे तिच्या लांबीशी गुणोत्तर काय असेल?

व्यास आणि लांबी दोघांचीही एके वेगळी दिलेली आहेत. म्हणून, त्यांना एकाच एककात बदलण्याची आवश्यकता आहे.

पेन्सिलची लांबी = 18 सेंमी =  $18 \times 10$  मिमी = 180 मिमी

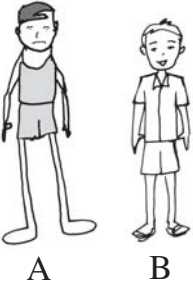
पेन्सिलच्या व्यासाचे तिच्या लांबीशी असलेले गुणोत्तर

$$= \frac{8}{180} = \frac{2}{45} = 2:45$$

## प्रयत्न करा

1. सौरभला घरातून शाळेत पोहचायला 15 मिनिटे लागतात आणि सचिनला एक तास लागतो. सौरभला लागलेला वेळ आणि सचिनला लागलेला वेळ यांचे गुणोत्तर शोधा.
2. एका गोळीची किंमत 50 पैसे आहे आणि एका चॉकलेटची किंमत 10 रुपये. गोळीच्या किमतीचे चॉकलेटच्या किमतीशी गुणोत्तर काढा.
3. एका शाळेत एका वर्षामध्ये 73 सुट्ट्या येतात. सुट्ट्यांचे वर्षातील एकूण दिवसांबरोबर गुणोत्तर काढा.

अजून कोणत्या ठिकाणी तुम्हाला दोन समान राशींची तुलना करावी लागते आणि त्या दोन राशींची एकके वेगळी असतात. जरा विचार करा.

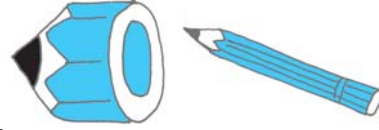


दैनंदिन व्यवहारात आपण गुणोत्तराची संकल्पना अनेक ठिकाणी न समजता वापरतो.

आकृती A तसेच B ची तुलना करा. आकृती B, आकृती A पेक्षा अधिक खरी वाटते का?

आकृती A मध्ये पाय बाकीच्या शरीराच्या तुलनेत लांब आहेत. याचे कारण असे की, आपण पायांचे शरीराच्या इतर भागांशी तुलना करताना विशिष्ट गुणोत्तर लक्षात ठेवतो.

चित्रातील दोन्ही पेन्सिलींची तुलना करा. पहिली पेन्सिल पूर्ण पेन्सिल आहे असे वाटते का? नाही. का नाही? कारण असे आहे की, पेन्सिलीची जाडी आणि लांबी यांच्यातील गुणोत्तर योग्य नाही.



आपण वेगवेगळ्या ठिकाणी एकच गुणोत्तर पाहू शकतो.

खालील उदाहरणे पहा.

- एका खोलीची लांबी 30 मी आणि तिची रुंदी 20 मी आहे. म्हणून खोलीच्या लांबीचे रुंदीशी असलेले गुणोत्तर =  $\frac{30}{20} = \frac{3}{2} = 3:2$
- एका सहलीसाठी 24 मुली आणि 16 मुले जाणार आहेत. मुलींच्या संख्येचे मुलांच्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर =  $\frac{24}{16} = \frac{3}{2} = 3:2$   
दोन्ही उदाहरणात गुणोत्तर 3 : 2 आहे.
- संक्षिप्त रूपात 30 : 20 आणि 24 : 16 समान गुणोत्तर आहेत; आणि ती 3 : 2 इतकी आहेत. यांना समतुल्य गुणोत्तरे म्हणतात.  
तुम्ही अजून काही उदाहरणांविषयी विचार करू शकाल का? ज्यांचे संक्षिप्त रूप 3 : 2 इतके आहे. अशा पद्धतीची उदाहरणे लिहा. ज्यांच्यामध्ये एक खास गुणोत्तर मिळेल, मजा येईल!  
उदाहरण असे द्या की, ज्यात गुणोत्तर 2 : 3 आहे.
- टेबलाच्या रुंदीचे लांबीशी असलेले गुणोत्तर 2 : 3
- शीनाजवळ 2 गोट्या आहेत तर तिची मैत्रिण शबनमजवळ 3 गोट्या आहेत, तर शीना आणि शबनमच्या गोट्यांचे गुणोत्तर = 2 : 3 आहे.

तुम्ही काही उदाहरणे लिहू शकाल का ज्यामध्ये गुणोत्तर हेच असेल? आपल्या मित्रांना काही गुणोत्तरे देऊन त्यावर आधारित काही उदाहरणे तयार करायला सांगा.

रवि आणि राणीने एक व्यवसाय सुरू केला आणि 2 : 3 या गुणोत्तरात पैसे गुंतविले. एका वर्षानंतर एकूण ₹ 40,000 चा नफा झाला.

रवि म्हणाला की आपण हा नफा समान वाटून घेऊ या. राणीने उत्तर दिले, “मला जास्त मिळाले पाहिजेत कारण मी जास्त गुंतवणूक केली आहे.”

तेव्हा असे ठरले की, गुंतवणुकीच्या गुणोत्तराप्रमाणेच नफा वाटून घ्यायचा.

येथे 2 : 3 गुणोत्तरात 2 आणि 3 या दोन राशी आहेत

या राशींची बेरीज = 2 + 3 = 5

याचा अर्थ काय?

याचा अर्थ असा की, जर ₹ 5 लाभ झाला तर रविला ₹ 2 आणि राणीला ₹ 3 मिळतील.

आपण हेही सांगू शकतो की, 5 भागांपैकी 2 भाग रविला आणि 3 भाग राणीला मिळतील.

म्हणजेच रविला  $\frac{2}{5}$  नफा मिळेल तर राणीला  $\frac{3}{5}$ .

जर एकूण नफा ₹ 500 असेल

तर रविला  $\frac{2}{5} \times 500 = ₹ 200$

आणि राणीला  $\frac{3}{5} \times 500 = ₹ 300$  मिळतील.

आता, जर एकूण नफा ₹ 40,000 असेल तर प्रत्येकाला किती हिस्सा मिळेल?

रविचा हिस्सा =  $\frac{2}{5} \times ₹ 40000 = ₹ 16,000$

आणि राणीचा हिस्सा =  $\frac{3}{5} \times ₹ 40000 = ₹ 24,000$

तुम्ही याप्रकारच्या आणखी उदाहरणांचा विचार करू शकाल का? जेथे तुम्हाला काही वस्तू एकाच गुणोत्तरामध्ये वाटायच्या आहेत. आणखी तीन उदाहरणे तयार करा आणि मित्रांना उकल काढण्यास सांगा.



### प्रयत्न करा

1. तुमच्या दप्तरामधील वह्यांच्या संख्येशी पुस्तकांच्या संख्येचे गुणोत्तर शोधा.
2. तुमच्या वर्गातील एकूण डेस्कच्या संख्येने खुर्च्यांच्या एकूण संख्येशी गुणोत्तर शोधा



3. तुमच्या वर्गातील 12 वर्षांवरील मुलांची संख्या शोधा. आता 12 वर्षांवरील मुलांच्या एकूण संख्येचे वर्गातील इतर विद्यार्थ्यांच्या संख्येशी गुणोत्तर काढा.
4. तुमच्या वर्गाच्या दरवाज्यांच्या संख्येचे खिडक्यांच्या संख्येशी गुणोत्तर काढा.
5. कोणताही एक आयत काढा. त्याच्या लांबीचे रुंदीशी गुणोत्तर काढा.

आतापर्यंत ज्या प्रकारची उदाहरणे पाहिली तशीच आणखी काही पाहू-

**उदाहरण 1** : एका आयताकृती मैदानाची लांबी आणि रुंदी अनुक्रमे 50 मी आणि 15 मी आहे. मैदानाच्या लांबीचे रुंदीशी असलेले गुणोत्तर शोधा.

**उकल** : आयताकृती मैदानाची लांबी = 50 मी  
 आयताकृती मैदानाची रुंदी = 15 मी  
 लांबीचे रुंदीशी असलेले गुणोत्तर = 50 : 15

$$\text{गुणोत्तर असे लिहिता येते } \frac{50}{15} = \frac{50 \square 5}{15 \square 5} = \frac{10}{3} = 10 : 3$$

म्हणून गुणोत्तर आहे 10 : 3

**उदाहरण 2** : 90 सेंमी आणि 1.5 मी यांचे गुणोत्तर शोधा.

**उकल** : दोन्ही राशी एकाच एककात नाहीत. म्हणून समान एककात आणल्यावर  
 1.5 मी = 1.5 × 100 सेंमी = 150 सेंमी  
 म्हणून हवे असलेले गुणोत्तर आहे,

$$90 : 150 = \frac{90}{150} = \frac{90 \square 30}{150 \square 30} = \frac{3}{5}$$

म्हणून हवे असलेले गुणोत्तर 3 : 5

**उदाहरण 3** : एका कार्यालयामध्ये 45 लोक काम करतात, तेथे महिलांची संख्या 25 असून उरलेले पुरुष आहेत, तर खालील गुणोत्तर शोधा.

- (a) महिलांच्या संख्येचे पुरुषांच्या संख्येशी
- (b) पुरुषांच्या संख्येचे महिलांच्या संख्येशी

**उकल** : महिलांची संख्या = 25  
 कर्मचाऱ्यांची संख्या = 45  
 पुरुषांची संख्या = 45 - 25 = 20  
 म्हणून महिलांच्या संख्येचे पुरुषांच्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर  
 = 25 : 20 = 5 : 4

आणि पुरुषांच्या संख्येचे महिलांच्या संख्येशी असलेले गुणोत्तर  
 = 20 : 25 = 4 : 5

(लक्षात ठेवा की 5 : 4 आणि 4 : 5 यात फरक आहे.)

**उदाहरण 4** : 6 : 4 ची दोन समतुल्य गुणोत्तरे लिहा.

**उकल** : गुणोत्तर 6 : 4 =  $\frac{6}{4} = \frac{6 \square 2}{4 \square 2} = \frac{12}{8}$

म्हणून 12 : 8 आणि 6 : 4 समतुल्य गुणोत्तरे आहेत.

$$\text{याचप्रमाणे } 6 : 4 = \frac{6}{4} = \frac{6 \div 2}{4 \div 2} = \frac{3}{2}$$

3:2 हे आणखी एक समतुल्य गुणोत्तर होय.

अशाप्रकारे, आपण कोणत्याही गुणोत्तराचे समतुल्य गुणोत्तर अंशाला आणि छेदाला एका समान संख्येने गुणून किंवा भागून मिळवू शकतो.

6 : 4 ची आणखी दोन समतुल्य गुणोत्तरे मिळवा.

**उदाहरण 5** : रिकाम्या जागा भरा.

$$\frac{14}{21} = \frac{\square}{3} = \frac{6}{\square}$$

**उकल** : पहिल्या रिकाम्या जागेसाठी आपण  $21 = 3 \times 7$  असे करू शकतो. 21 ला 7 भाग दिला असता 3 ही संख्या मिळते. यावरून दुसऱ्या गुणोत्तरातील रिकामी जागा शोधण्यासाठी 14 ला 7 ने भागू. भाग दिल्यानंतर  $14 \div 7 = 2$

म्हणून दुसरे गुणोत्तर  $\frac{2}{3}$  आहे.

अशाचप्रकारे, तिसऱ्या गुणोत्तरासाठी, दुसऱ्या गुणोत्तरामधील दोन्ही राशींना 3 ने गुणावे लागेल. (का?)

म्हणून तिसरे गुणोत्तर  $\frac{6}{9}$  आहे.

अशाप्रकारे,  $\frac{14}{21} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$  [सर्व समतुल्य गुणोत्तर आहेत.]

**उदाहरण 6** : मेरीच्या घरापासून शाळेपर्यंतच्या अंतराचे जॉनच्या घरापासून शाळेपर्यंतच्या अंतराशी गुणोत्तर 2 : 1 आहे.

(a) शाळेच्या सर्वात जवळ कोण राहतो?

(b) खालील सारणी पूर्ण करा. त्यातील काही अंतरांवर मेरी आणि जॉन राहात असू शकतील.

मेरीच्या घरापासून शाळेचे अंतर (किमी)	10	<input type="text"/>	4	<input type="text"/>	<input type="text"/>
जॉनच्या घरापासून शाळेचे अंतर (किमी)	5	4	<input type="text"/>	3	1

(c) जर मेरीच्या घरापासून शाळेपर्यंतच्या अंतराचे कलामच्या घरापासून शाळेपर्यंतच्या अंतराशी असलेले गुणोत्तर 1 : 2 असेल तर कोण शाळेच्या सर्वात जवळ राहतो?

**उकल** : (a) जॉन शाळेच्या सर्वात जवळ राहतो. (कारण गुणोत्तर 2 : 1 आहे)

(b)

मेरीच्या घरापासून शाळेचे अंतर (किमी)	10	<input type="text"/>	4	<input type="text"/>	<input type="text"/>
जॉनच्या घरापासून शाळेचे अंतर (किमी)	5	4	<input type="text"/>	3	1

(c) गुणोत्तर 1 : 2 आहे म्हणून मेरी शाळेच्या जास्त जवळ राहते.

**उदाहरण 7** : कृति आणि किरण यांच्यात ₹ 60 1 : 2 गुणोत्तरात वाटा.

**उकल** : गुणोत्तराचे 2 भाग आहेत 1 आणि 2.

म्हणून दोन भागांची बेरीज = 1 + 2 = 3

याचा अर्थ असा आहे की, जर ₹ 3 असतील तर कृतिला ₹ 1 आणि किरणला ₹ 2 मिळतील.

म्हणजेच 3 मधील कृतिला एक भाग आणि किरणला 2 भाग मिळतील.

$$\text{म्हणून कृतिचा वाटा} = \frac{1}{3} \times ₹ 60 = ₹ 20$$

$$\text{आणि किरणचा वाटा} = \frac{2}{3} \times ₹ 60 = ₹ 40$$



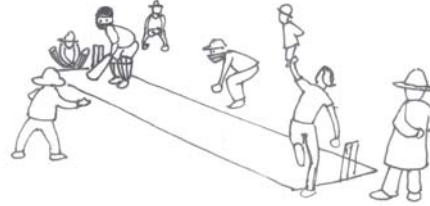
### उदाहरणसंग्रह 12.1

1. एका वर्गात 20 मुली आणि 15 मुले आहेत. गुणोत्तरे शोधा.

- (a) मुलींच्या संख्येचे मुलांच्या संख्येशी  
(b) मुलींच्या संख्येचे एकूण विद्यार्थी संख्येशी

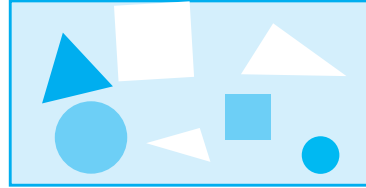
2. 30 विद्यार्थ्यांच्या एका वर्गात, 6 जणांना फुटबॉल, 12 जणांना क्रिकेट आणि इतरांना टेनिस आवडते. गुणोत्तरे शोधा:-

- (a) फुटबॉल आवडणाऱ्यांच्या संख्येचे टेनिस आवडणाऱ्यांच्या संख्येशी  
(b) क्रिकेटप्रेमींचे एकूण विद्यार्थी संख्येशी



3. आकृती पाहून गुणोत्तरे काढा.

- (a) आयतामधील त्रिकोणाच्या संख्येचे वर्तुळाच्या संख्येशी  
(b) आयतामधील सर्व चौरसांच्या संख्येचे सर्व आकृतींशी  
(c) आयतामधील सर्व वर्तुळांचे सर्व आकृतींबरोबर



4. हामिद आणि अख्तरने एका तासात अनुक्रमे 9 किमी आणि 12 किमी अंतर पार केले, तर हामिद आणि अख्तरच्या अंतराचे गुणोत्तर शोधा.

5. रिकाम्या जागा भरा.

$$\frac{15}{18} = \frac{\square}{6} = \frac{10}{\square} = \frac{\square}{30} \text{ [ही समतुल्य गुणोत्तरे आहेत का?]}$$

6. खालील प्रत्येकाचे गुणोत्तर शोधा.

- (a) 81 चे 108 शी  
(b) 98 चे 63 शी  
(c) 33 किमीचे 121 किमीशी  
(d) 30 मिनिटाचे 45 मिनिटांशी



7. खालील प्रत्येकाचे गुणोत्तर शोधा.  
 (a) 30 मिनिटांचे 1.5 तासाशी (b) 40 सेंमीचे 1.5 मीटरशी  
 (c) 55 पैशांचे 1 रुपयाशी (d) 500 मिलीचे 2 लीटरशी
8. एका वर्षात सीमा ₹ 1,50,000 मिळविते आणि ₹ 50,000 ची बचत करते. प्रत्येक गुणोत्तराची किंमत काढा:-  
 (a) सीमाने केलेला खर्च आणि तिची बचत  
 (b) सीमाने केलेली बचत आणि तिने केलेला खर्च
9. एका शाळेत 3300 विद्यार्थी आणि 102 शिक्षक आहेत. शिक्षकांच्या संख्येचे विद्यार्थ्यांच्या संख्येशी गुणोत्तर काढा.
10. एका महाविद्यालयामध्ये 4320 विद्यार्थ्यांपैकी 2300 मुली आहेत, तर गुणोत्तर काढा.  
 (a) मुलींची संख्या आणि एकूण विद्यार्थी संख्येचे  
 (b) मुलांची संख्या आणि मुलींची संख्येचे  
 (c) मुलांची संख्या आणि एकूण विद्यार्थी संख्येचे
11. एका शाळेतील 1800 विद्यार्थ्यांपैकी 750 जणांना बास्केटबॉल, 800 जणांना क्रिकेट आणि उरलेल्यांना टेबल टेनिस खेळायला आवडते. जर एका विद्यार्थ्याने केवळ एका खेळाची निवड केली तर गुणोत्तर काढा:-  
 (a) बास्केट बॉल खेळणाऱ्यांचे आणि टेबल टेनिस खेळणाऱ्यांचे  
 (b) क्रिकेट खेळणाऱ्यांचे आणि बास्केटबॉल खेळणाऱ्यांचे  
 (c) बास्केटबॉल खेळणाऱ्यांचे आणि एकूण विद्यार्थ्यांचे
12. एक डझन पेनांची किंमत ₹ 180 आहे आणि 8 बॉलपेनची किंमत ₹ 56 आहे. पेनच्या किमतीचे बॉलपेनच्या किमतीशी गुणोत्तर काढा.
13. विधान पाहा - एका सभागृहाच्या रुंदीचे आणि लांबीचे गुणोत्तर 2 : 5 आहे. खालील सारणी पूर्ण करा. ज्यामध्ये सभागृहाच्या काही रुंदी व लांबीच्या शक्य असलेल्या किमती दिल्या आहेत.

सभागृहाची रुंदी (मी मध्ये)	10	<input type="text"/>	40
सभागृहाची लांबी (मी मध्ये)	25	50	<input type="text"/>

14. शीला आणि संगीतामध्ये 20 पेन 3 : 2 या गुणोत्तरात वाटा.  
 15. एका आईला तिच्या मुली श्रेया आणि भूमिका यांना ₹ 36 त्यांच्या वयांच्या गुणोत्तराएवढे वाटायचे आहेत. जर श्रेयाचे वय 15 वर्षे आणि भूमिकाचे वय 12 वर्षे असेल तर श्रेया आणि भूमिकाला किती किती रुपये मिळतील?  
 16. वडिलांचे आजचे वय 42 वर्षे आणि त्यांच्या मुलाचे 14 वर्षे आहे. गुणोत्तर काढा.

- (a) वडिलांच्या आजच्या वयाशी मुलाच्या आजच्या वयाचे  
 (b) जेव्हा मुलगा 12 वर्षांचा होतो, तेव्हा वडिलांच्या वयाचे मुलाच्या वयाशी  
 (c) 10 वर्षांनंतर, वडिलांच्या वयाचे मुलाच्या वयाशी  
 (d) वडिलांचे वय 30 वर्षे असताना वडिलांच्या वयाशी मुलाच्या वयाशी



### 12.3 प्रमाण

हा प्रसंग पाहा :

राजू बाजारात टोमॅटो खरेदी करण्यासाठी जातो. एक दुकानदार सांगतो की, 5 किग्रॅ टोमॅटो ₹ 40 ला आहेत. दुसरा दुकानदार 6 किग्रॅ टोमॅटोची किंमत ₹ 42 सांगतो. आता राजूने काय केले पाहिजे? त्याने टोमॅटो पहिल्या दुकानदाराकडून घ्यावे की दुसऱ्या दुकानदाराकडून? निर्णय घेण्यासाठी, वजाबाकी करून तो तुलना करू शकेल का? नाही? का नाही?



त्याला मदत करण्यासाठी कोणता उपाय सुचवाल? आपल्या मित्रांशी चर्चा करा.

आणखी एक उदाहरण पाहू.

भाविकाजवळ 28 गोट्या आणि विनीजवळ 180 फुले आहेत. दोघींना ते एकमेकींमध्ये वाटायचे आहेत. भाविकाने 14 गोट्या विनीला दिल्या आणि विनीने 90 फुले भाविकाला दिली. परंतु विनी खूष नाही. तिला असे वाटते आहे की, तिने भाविकाला जास्त फुले दिली. मात्र भाविकाने मात्र तिला कमी गोट्या दिल्या आहेत.

तुम्हाला काय वाटते? विनीचे म्हणणे बरोबर आहे? दोघीजणी प्रश्नाच्या उत्तराचे समाधान करण्यासाठी विनीच्या आईकडे म्हणजे पूजाकडे गेल्या.

पूजाने त्यांना समजावले. 28 गोट्यांपैकी भाविकाने विनीला 14 गोट्या दिल्या म्हणून गुणोत्तर होईल  $14 : 28 = 1 : 2$

आणि 180 फुलांपैकी विनीने 90 फुले भाविकाला दिली म्हणजे गुणोत्तर

$$90 : 180 = 1 : 2$$

येथे गुणोत्तर समान आहेत म्हणजेच वितरण बरोबर आहे.

दोन मैत्रिणी आशमा आणि पंखुरी बाजारात हेअर क्लिपा खरेदी करायला गेल्या. त्यांनी ₹ 30 ला 20 हेअर क्लिपा घेतल्या. आशमाने ₹ 12 दिले तर पंखुरीने ₹ 18 दिले. घरी आल्यावर आशमाने पंखुरीला 10 हेअर क्लिपा देण्यास सांगितले. परंतु पंखुरीचे म्हणणे असे होते की जर मी जास्त रुपये दिले तर मला जास्त हेअर क्लिपा मिळाल्या पाहिजे. याप्रमाणे आशमाला 8 आणि तिला 12 हेअर क्लिपा

मिळाल्या पाहिजेत.

तुम्ही सांगू शकाल का? आशमा आणि पंखुरीमध्ये कोणाचे म्हणणे बरोबर आहे? का?

आशमाने दिलेले पैसे आणि पंखुरीने दिलेले पैसे यांचे गुणोत्तर =  $12 : 18 = 2 : 3$  आहे. आशमाच्या म्हणण्याप्रमाणे, आशमाकडील हेअर क्लिपांची संख्या आणि पंखुरीकडील हेअर क्लिपांची संख्या यांचे गुणोत्तर =  $10 : 10 = 1 : 1$

पंखुरीच्या म्हणण्यानुसार,

आगमाकडील हेअर क्लिपांची संख्या आणि पंखुरीकडील हेअर क्लिपांची संख्या यांचे गुणोत्तर = 8 : 12 = 2 : 3 आहे.

आशमाच्या म्हणण्याप्रमाणे केलेले हेअर क्लिपांचे वितरणाचे गुणोत्तर, दिलेल्या पैशांच्या गुणोत्तराबरोबर नाही, की जे पाहिजे. तर पंखुरीने सांगितल्याप्रमाणे केलेल्या वितरणात दोन्ही गुणोत्तरे समान आहेत.

म्हणून, पंखुरीने केलेले वितरण बरोबर आहे.

### गुणोत्तरे

खालील काही उदाहरणे पाहूया

- राजने ₹ 15 मध्ये 3 पेन खरेदी केले तर अनुने ₹ 50 मध्ये 10 पेन खरेदी केले. कोणाचे पेन महाग आहे? राजने खरेदी केलेली पेनांची संख्या आणि अनुने खरेदी केलेल्या पेनांची संख्या यांचे गुणोत्तर = 3 : 10.

किमतीचे गुणोत्तर = 15 : 50 = 3 : 10

3 : 10 आणि 15 : 50 समान आहेत. म्हणजे, दोघांनी सारख्याच किमतीला पेनाची खरेदी केली.

- रहिमने ₹ 60 ला 2 किग्रॅ सफरचंद विकले, तर रोशनने ₹ 120 ला 4 किग्रॅ. कोणी महाग विकले?

सफरचंदाचे वजनी गुणोत्तर = 2 किग्रॅ : 4 किग्रॅ = 1 : 2

किमतीचे गुणोत्तर = 60 : 120 = 6 : 12 = 1 : 2

म्हणजे सफरचंदांचे वजनी गुणोत्तर = किमतीचे गुणोत्तर

दोन्ही गुणोत्तरे समान आहेत. म्हणून आपण असे म्हणू शकतो की, ही समान गुणोत्तरे आहेत. ते दोघे एकाच किमतीत सफरचंद विकत आहेत.

जर दोन गुणोत्तरे समान असतील तर ती प्रमाणात आहेत हे दाखविण्यासाठी ‘::’ किंवा ‘=’ चिन्हाचा उपयोग करतात.

पहिल्या उदाहरणामध्ये, आपण सांगू शकतो की, 3, 10, 15 आणि 50 प्रमाणात आहेत. आपण व त्यांना 3 : 10 :: 15 : 50 असे लिहू शकतो आणि तीनास दहा बरोबर पंधरास पन्नास असे वाचू शकतो.

दुसऱ्या उदाहरणामध्ये, 2, 4, 60 आणि 120 प्रमाणात आहेत.

आपण 2 : 4 :: 60 : 120 असे लिहू आणि 2 स 4 बरोबर 60 स 120 असे वाचू शकतो.

इतर काही उदाहरणे पाहू

एक व्यक्ती 2 तासात 35 किमी चालते. याच गतीने 4 तासात 70 किमी चालू शकेल?

दोन्ही वेळेस चाललेल्या अंतराचे गुणोत्तर = 35 : 70 = 1 : 2

लागलेल्या वेळेचे गुणोत्तर 2 : 4 = 1 : 2.

अशाप्रकारे दोन्ही गुणोत्तरे समान आहेत. म्हणजेच 35 : 70 = 2 : 4



म्हणून आपण असे म्हणू शकतो की, 35, 70, 2 आणि 4 या चार संख्या प्रमाणात आहेत.  
हे आपण  $35 : 70 :: 2 : 4$  असे लिहू शकतो आणि 35 स 70 बरोबर 2 स 4 असे वाचू शकतो.  
म्हणजेच व्यक्ती 4 तासात 70 किमी त्याच गतीने चालू शकते.

आता आपण पुढील उदाहरण पाहूया.

2 किग्रॅ सफरचंदांची किंमत ₹ 60 आहे आणि ₹ 5 किग्रॅ टरबुजांची किंमत ₹ 15 आहे.

दोघांचे वजनाचे गुणोत्तर =  $2 : 5$  आहे.

दोघांच्या किमतीचे गुणोत्तर =  $60 : 15$  आहे.

येथे  $2 : 5$  आणि  $60 : 15$  समान नाहीत.

म्हणजेच  $2 : 5 \neq 60 : 15$

अशाप्रकारे 2, 5, 60 आणि 15 या चार राशी प्रमाणात नाहीत.

जर दोन गुणोत्तरे समान नसतील तर त्या राशी प्रमाणात नसतात.

### प्रयत्न करा

खाली दिलेली गुणोत्तरे समान आहेत का? याचा पडताळा घ्या. म्हणजेच ती प्रमाणात आहेत का?  
जर असतील तर ती योग्य प्रकारे लिहा.

1.  $1 : 5$  आणि  $3 : 15$
2.  $2 : 9$  आणि  $18 : 81$
3.  $15 : 45$  आणि  $5 : 25$
4.  $4 : 12$  आणि  $9 : 27$
5. ₹ 10 चे ₹ 15 बरोबर आणि 4 चे 6 बरोबर

प्रमाणात असलेल्या, क्रमाने घेतलेल्या चारही राशींना पद असे म्हणतात. पहिल्या आणि चौथ्या पदास अंत्य पदे म्हणतात. दुसऱ्या आणि तिसऱ्या पदास मध्य पदे म्हणतात.

उदाहरणार्थ  $35 : 70 :: 2 : 4$

यामध्ये 35, 70, 2 आणि 4 ही चार पदे आहेत. ज्यापैकी 35 आणि 4 अंत्यपदे आणि 70 तसेच 2 ही मध्य पदे आहेत.

**उदाहरण 8** : 25 ग्रॅम : 30 ग्रॅम आणि 40 किग्रॅ : 48 किग्रॅ ही गुणोत्तरे प्रमाणात आहेत का?

**उकल** :  $25 \text{ ग्रॅम} : 30 \text{ ग्रॅम} = \frac{25}{30} = 5 : 6$

$40 \text{ ग्रॅम} : 48 \text{ ग्रॅम} = \frac{40}{48} = 5 : 6$

म्हणजेच  $25 : 30 = 40 : 48$

म्हणून 25 ग्रॅम : 30 ग्रॅम आणि 40 किग्रॅ : 48 किग्रॅ ही गुणोत्तरे प्रमाणात आहे,  
अर्थात  $25 : 30 :: 40 : 48$

येथे 25, 48 अंत्य पदे तर 30, 40 मध्य पदे आहेत.

**उदाहरण 9** : 30, 40, 45 आणि 60 प्रमाणात आहेत का?

$$\text{उकल} \quad : 30 \text{ आणि } 40 \text{ चे गुणोत्तर} = \frac{30}{40} = 3 : 4$$

$$45 \text{ आणि } 60 \text{ चे गुणोत्तर} = \frac{45}{60} = 3 : 4$$

$$30 : 40 = 45 : 60$$

म्हणून 30, 40, 45, 60 प्रमाणात आहेत.

**उदाहरण 10** : 15 सेमीचे 2 मीमी शी आणि 10 सेकंदांचे 3 मिनिटांशी असणारे गुणोत्तर प्रमाणात असेल का?

$$\begin{aligned} \text{उकल} \quad : 15 \text{ सेमीचे } 2 \text{ मीमी शी गुणोत्तर} \\ = 15 : 2 \times 100 \text{ (1 मी} = 100 \text{ सेमी)} \\ = 3 : 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \text{ सेकंदाचे } 3 \text{ मिनिटांशी गुणोत्तर} \\ = 10 : 3 \times 60 \text{ (1 मिनिट} = 60 \text{ सेकंद)} \\ = 1 : 18 \end{aligned}$$

यावरून  $3 : 40 \neq 1 : 18$ , म्हणून दिलेली गुणोत्तरे प्रमाणात नाहीत.



### उदाहरणसंग्रह 12.2

- खालील राशी प्रमाणात आहेत का?
  - 15, 45, 40, 120
  - 33, 121, 9, 96
  - 24, 28, 36, 48
  - 32, 48, 70, 210
  - 4, 6, 8, 12
  - 33, 44, 75, 100
- पुढील प्रत्येक विधान सत्य की असत्य ते सांगा.
  - $16 : 24 :: 20 : 30$
  - $21 : 6 :: 35 : 10$
  - $12 : 18 :: 28 : 12$
  - $8 : 9 :: 24 : 27$
  - $5.2 : 3.9 :: 3 : 4$
  - $0.9 : 0.36 :: 10 : 4$
- खालील विधाने बरोबर आहेत का?
  - 40 व्यक्ती : 200 व्यक्ती = 15 रु. : 75 रु.
  - 7.5 ली. : 15 ली. = 5 किग्रॅ : 10 किग्रॅ
  - 99 किग्रॅ : 45 किग्रॅ = 44 रु. : 20 रु.
  - 32 मी : 64 मी = 6 सेकंद : 12 सेकंद
  - 45 किमी : 60 किमी = 12 तास : 15 तास
- खालील गुणोत्तरे प्रमाणात आहेत का? जर असतील तर, मध्य पदे व अंत्य पदे लिहा.
  - 25 सेंमी : 1 मी आणि ₹ 40 : ₹ 160
  - 39 ली. : 65 ली आणि 6 बाटल्या : 10 बाटल्या
  - 2 किग्रॅ : 80 किग्रॅ आणि 25 ग्रॅ : 625 ग्रॅ
  - 200 मिली : 2.5 ली आणि 4 रु. : 50 रु.

## 12.4 एकमान पद्धत

खालील उदाहरणे पहा

- दोन मैत्रिणी रेश्मा आणि सीमा अभ्यासाची पुस्तके खरेदी करण्यासाठी बाजारात जातात. रेश्माने ₹ 24 ना 2 पुस्तके खरेदी केली, तर एका पुस्तकाची किंमत काढा.
- 80 किमी अंतर पार करण्यासाठी एका स्कूटरला 2 लीटर पेट्रोल लागते, तर 1 किमी अंतर जाण्यासाठी किती पेट्रोल लागेल?  
वरील उदाहरणे आपल्या दैनंदिन जीवनाशी निगडीत आहेत. ही आपण कशी सोडवूया?



पहिले उदाहरण पुन्हा पाहू.

2 अभ्यास पुस्तकांची किंमत = ₹ 24

म्हणून 1 अभ्यास पुस्तकाची किंमत = ₹ 24 ÷ 2 = ₹ 12

जर 5 अभ्यास पुस्तकांची किंमत काढावयाची असेल तर ती ₹ 12 × 5 = ₹ 60 होईल.

दुसरे उदाहरण पुन्हा पाहू.

एक किमी जाण्यासाठी किती पेट्रोल लागेल हे आपल्याला माहीत करून घ्यायचे आहे.

80 किमी जाण्यासाठी लागणारे पेट्रोल = 2 लीटर

1 किमी जाण्यासाठी लागणारे पेट्रोल =  $\frac{2}{80} = \frac{1}{40}$  लीटर

जर 120 किमी जाण्यासाठी किती पेट्रोल लागेल? असे विचारले असता, आवश्यक असलेले

पेट्रोल =  $\frac{1}{40} \times 120$  किमी = 3 लीटर

ज्या पद्धतीमध्ये आपण प्रथम एक एककाची किंमत काढतो आणि नंतर जितक्या एककांची किंमत काढायची असेल, ती काढतो. अशा पद्धतीस एकमान पद्धत म्हणतात.

### प्रयत्न करा

1. पाच उदाहरणे अशाच प्रकारची तयार करा आणि मित्रांबरोबर सोडवा.
2. खालील सारणी अभ्यासा आणि पूर्ण करा.

वेळ	करणे पार केलेले अंतर	कृतिने पार केलेले अंतर
2 तास	8 किमी	6 किमी
1 तास	4 किमी	<input type="text"/>
4 तास	<input type="text"/>	<input type="text"/>

$$\text{करणे 1 तासात पार केलेले अंतर} = \frac{8}{2} \text{ किमी} = 4 \text{ किमी}$$

$$\text{म्हणून करणने 4 तासांत पार केलेले अंतर} = 4 \times 4 = 16 \text{ किमी}$$

अशाचप्रकारे कृतिने 4 तासांत किती अंतर पार केले हे काढण्यासाठी तिने एका तासात किती अंतर पार केले ते काढावे लागेल.

**उदाहरण 11** : जर 6 ज्यूसच्या कॅनची किंमत ₹ 210 असेल तर 4 कॅनची किंमत काढा.

**उकल** : 6 ज्यूसच्या कॅनची किंमत = ₹ 210

$$\text{म्हणून 1 ज्यूस कॅनची किंमत} = \frac{210}{6} = ₹ 35$$

$$\text{म्हणून 4 ज्यूस कॅनची किंमत} = ₹ 35 \times 4 = ₹ 140$$

अशाप्रकारे 4 ज्यूस कॅनची किंमत ₹ 140 होईल.

**उदाहरण 12** : एका मोटरसायकलने 220 किमी अंतर जाण्यासाठी 5 लीटर पेट्रोल लागते, तर 1.5 लीटर पेट्रोलमध्ये किती अंतर जाऊ शकेल?

**उकल** : 5 लीटरमध्ये मोटरसायकलने कापलेले अंतर = 220 किमी

$$1 \text{ लीटरमध्ये मोटरसायकलने कापलेले अंतर} = \frac{220}{5} \text{ किमी}$$

$$1.5 \text{ लीटरमध्ये मोटरसायकलने कापलेले अंतर} = \frac{220}{5} \times 1.5$$

$$\text{किमी} = \frac{220}{5} \times \frac{15}{10} \text{ किमी} = 66 \text{ किमी}$$

म्हणून 1.5 लीटर पेट्रोलमध्ये 66 किमी अंतर जाता जाईल.



**उदाहरण 13** : एक डझन साबणाच्या वड्यांची किंमत ₹ 153.60 आहे. अशा साबणाच्या 15 वड्यांची किंमत काढा.

**उकल** : 1 डझन = 12

$$\text{जर 12 साबणाच्या वड्यांची किंमत} = ₹ 153.60$$

$$\text{तर 1 साबणाच्या वड्यांची किंमत} = \frac{153.60}{12} = ₹ 12.80$$

$$\text{म्हणून 15 साबणाच्या वड्यांची किंमत} = ₹ 12.80 \times 15 = ₹ 192$$

अशाप्रकारे, 15 साबणाच्या वड्यांची किंमत ₹ 192

**उदाहरण 14** : 105 पाकिटांची किंमत ₹ 35 आहे. ₹ 15 मध्ये किती पाकिटे खरेदी करता येतील?

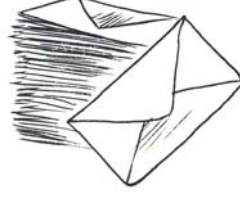
**उकल** : ₹ 35 मध्ये खरेदी करता येणारी पाकिटांची संख्या = 105

$$\text{म्हणून ₹ 1 मध्ये खरेदी करता येणारी पाकिटांची संख्या} = \frac{105}{35}$$

म्हणून ₹ 10 मध्ये खरेदी करता येणारी पाकिटांची संख्या

$$= \frac{105}{35} \times 10 = 30$$

अशाप्रकारे ₹ 10 मध्ये 30 पाकिटे खरेदी करता येतील.



**उदाहरण 15 :**

एक मोटार  $2\frac{1}{2}$  तासांत 90 किमी जाते.

(a) याच गतीने 30 किमी अंतर जाण्यासाठी किती वेळ लागेल ?

(b) याच गतीने 2 तासांत किती अंतर जाता येईल ?

**उकल :**

(a) पहिल्या स्थितीत अंतर माहीत आहे, वेळ माहीत नाही. म्हणून, आपण असे सोडवू या.

$$2\frac{1}{2} \text{ तास} = \frac{5}{2} \text{ तास} = \frac{5}{2} \times 60 \text{ मिनिटे} = 150 \text{ मिनिटे}$$

$$90 \text{ किमी अंतर जाण्यासाठी लागणारा वेळ} = 150 \text{ मिनिटे}$$

$$\text{म्हणून } 1 \text{ किमी अंतर जाण्यासाठी लागणारा वेळ} = \frac{150}{90} \text{ मिनिटे}$$

$$\begin{aligned} \text{म्हणून, } 30 \text{ किमी अंतर जाण्यासाठी लागणारा वेळ} &= \frac{150}{90} \times 30 \text{ मिनिटे} \\ &= 50 \text{ मिनिटे} \end{aligned}$$

अशाप्रकारे 30 किमी अंतर जाण्यासाठी 50 मिनिटे लागतील.

(b) दुसऱ्या स्थितीत अंतर माहीत नाही, वेळ माहीत आहे. म्हणून असे सोडवू शकतो.

$$2\frac{1}{2} \text{ तास} = \frac{5}{2} \text{ तास}$$

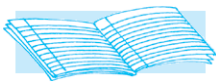
$$\frac{5}{2} \text{ तासांत कापलेले अंतर} = 90 \text{ किमी}$$

$$\text{म्हणून } 1 \text{ तासात कापलेले अंतर} = 90 \div \frac{5}{2} \text{ किमी}$$

$$= 90 \times \frac{2}{5} = 36 \text{ किमी}$$

$$\text{म्हणून } 2 \text{ तासांत कापलेले अंतर} = 36 \times 2 = 72 \text{ किमी}$$

अशाप्रकारे 2 तासांत 72 किमी अंतर पार करता येईल.



**उदाहरणसंग्रह 12.3**

- जर 7 मी कापडाची किंमत ₹ 294 असेल तर 5 मी कापडाची किंमत काढा.
- एकता 10 दिवसांत ₹ 1500 मिळविते, तर 30 दिवसांत ती किती ₹ मिळवेल ?



3. जर मागील 3 दिवसांत 276 मिमी पाऊस पडला असेल, तर एका आठवड्यात (7 दिवस) किती सेमी पाऊस पडेल? समजा, त्याच समान गतीने पाऊस पडत आहे.
4. 5 किग्रॅ गव्हाची किंमत ₹ 30.50 आहे.
  - (a) 8 किग्रॅ गव्हाची किंमत काय होईल.
  - (b) ₹ 61 मध्ये किती गहू खरेदी करता येईल?
5. मागील 30 दिवसांत तापमान  $15^\circ$  सेल्सियसने कमी होत आहे. जर तापमानातील घट याच वेगाने चालू राहिली तर, पुढील 10 दिवसांत तापमान किती अंशाने कमी होईल?
6. शायना 3 महिन्यांचे भाडे ₹ 7500 देते. जर वर्षभर भाडे समान समान असेल, तर पूर्ण वर्षासाठी किती भाडे द्यावे लागेल?
7. 4 डझन केळ्यांची किंमत ₹ 60 आहे. ₹ 12.50 त किती केळी खरेदी करता येतील?
8. 72 पुस्तकांचे वजन 9 किग्रॅ आहे. अशा 40 पुस्तकांचे वजन किती होईल?
9. एका ट्रकला 594 किमी अंतर जाण्यासाठी 108 लीटर डिझेल लागते, तर 1650 किमी अंतर जाण्यासाठी किती लीटर डिझेल लागेल?
10. राजूने ₹ 150 मध्ये 10 पेन आणि मनीषने ₹ 84 मध्ये 7 पेन खरेदी केले, तर कोणी स्वस्तात खरेदी केली?
11. अनीशने 6 षटकांत 42 धावा केल्या आणि अनूपने 7 षटकांत 63 धावा केल्या, तर एका षटकात कोणी जास्त धावा केल्या?

### आपण काय चर्चा केली ?

1. एकसारख्या राशींची तुलना आपण साधारणपणे वजाबाकी करून करतो.
2. बहुतेक वेळा पटीने तुलना करणे चांगले असते. म्हणजेच एक राशी दुसऱ्या राशीच्या किती पट आहे? याला पटीने तुलना करणे असे म्हणतात.
3. गुणोत्तराच्या मदतीने तुलना करताना दोन्ही राशींची एकके समान असावीत. जर समान नसतील तर गुणोत्तरे घेण्यापूर्वी ती समान करून घ्यावीत.
4. वेगवेगळ्या उदाहरणात गुणोत्तर समान असू शकते.
5.  $3 : 2$  आणि  $2 : 3$  ही गुणोत्तरे एकमेकांपासून वेगळी/भिन्न आहेत. म्हणजेच ज्या क्रमाने राशी घेतल्या जातात तो महत्त्वाचा आहे.
6. गुणोत्तरास अपूर्णांकदेखील म्हणता येईल. जसे  $10 : 3 = \frac{10}{3}$ .
7. दोन गुणोत्तरे समान असतील तर त्यांचे अपूर्णांकदेखील समान असतील. जसे  $3 : 2$  हे  $6 : 4$  आणि  $12 : 8$  शी समान आहे.

8. एखाद्या गुणोत्तरास संक्षिप्त रूप देता येते. उदाहरणार्थ  $50 : 15$  हे  $\frac{50}{15}$  असे लिहू शकतो आणि संक्षिप्त रूपात  $\frac{50}{15} = \frac{10}{3}$  होय. अशाप्रकारे संक्षिप्त रूपात  $50 : 15 = 10 : 3$ .
9. चार राशी प्रमाणात आहे असे म्हणणे, पहिल्या आणि दुसऱ्या राशींचे गुणोत्तर, तिसऱ्या आणि चौथ्या राशींच्या गुणोत्तराबरोबर आहे. अशाप्रकारे 3, 10, 15, 50 प्रमाणात आहे. कारण  $\frac{3}{10} = \frac{15}{50}$  आपण प्रमाणात  $3 : 10 :: 15 : 50$  असे दर्शवितो तर 3 स 10 बरोबर 15 स 50 असे वाचतो. वर लिहिलेल्या प्रमाणात, 3 आणि 50 अंत्य पदे असून 10 आणि 15 मध्य पदे आहेत.
10. प्रमाणात क्रम महत्त्वाचा आहे. 3, 10, 15 आणि 50 प्रमाणात आहेत. परंतु 3, 10, 50 आणि 15 नाहीत. कारण  $\frac{3}{10} \neq \frac{50}{15}$ .
11. ज्या क्रियेत आपण एका एककाची किंमत काढतो आणि नंतर हव्या असलेल्या एककांच्या किमती काढतो. त्यास एकमान पद्धत म्हणतात. जर 6 कॅनची किंमत 210 रु. आहे. 4 कॅनची किंमत काढण्यासाठी, प्रथम एका कॅनची किंमत काढू की जी  $\frac{210}{6}$  किंवा 35 रु. असेल. यावरून 4 कॅनची किंमत  $\text{₹ } 35 \times 4$  म्हणजेच  $\text{₹ } 140$  येईल.